

Az Eötvös-kísérlet: egy modellhiba és tanulságai

Tóth Gyula



Miről lesz szó?

- Az Eötvös-Pekár-Fekete kísérlet áttekintése
- Az eredményeket befolyásoló, egy eddig észre nem vett modellhiba
 - okok és következmények
- Renner kísérlete a modellhiba fényében
- Tanulságok



Eötvös-kísérlet 1906-1909

Kérdés: a nehézségi erőterben változik-e a gyorsulás az anyagi minőséggel?

- a megvizsgált anyagok:
 - magnalium, kígyófa, vörösréz, víz, kristályos rézsulfát, rézsulfátoldat, azbeszt, faggyú, ezüstsulfát és vassulfát
 - a próbatestek **különböző méretű és alakú** hengerek voltak

Válasz: nem

- az elért pontosság: $1/200\,000\,000$
- publikált eredmények: R.v. Eötvös, D. Pekár, E. Fekete, Annalen der Physik 68, 11, 1922 (EPF)



Eötvös-kísérlet alapgondolata

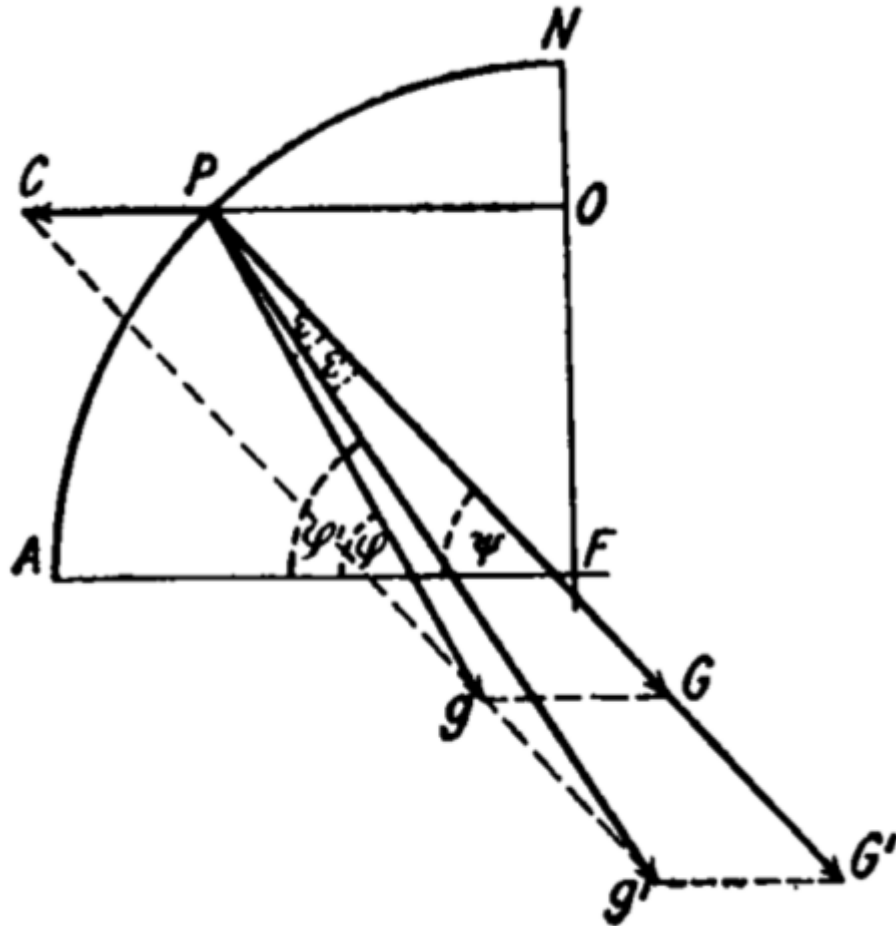


Fig. 1.

C centrifugális erő (gyorsulás)
nem függ az anyagi minőségtől

Az anyagi minőségtől függő

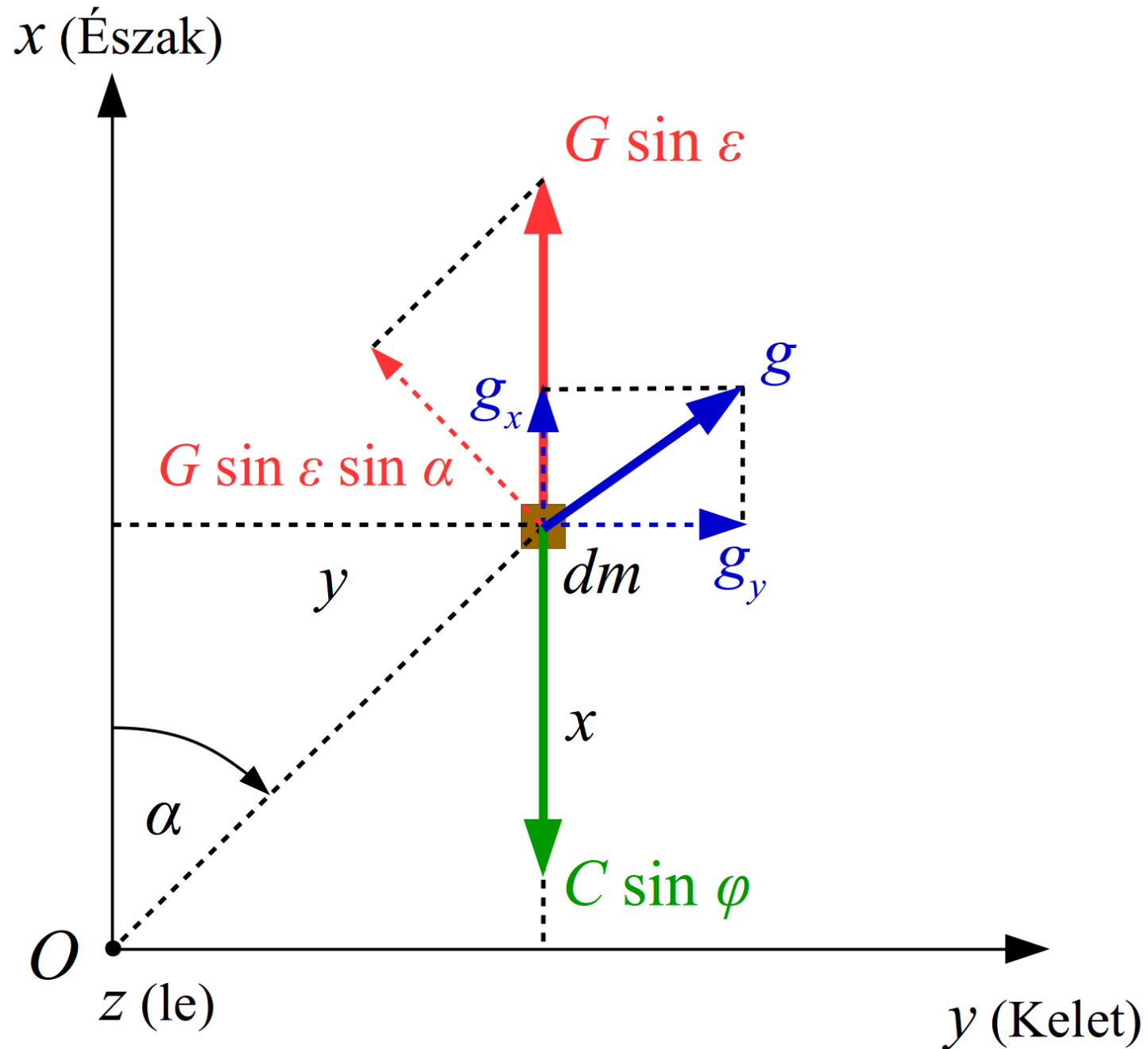
G tömegvonzási erő

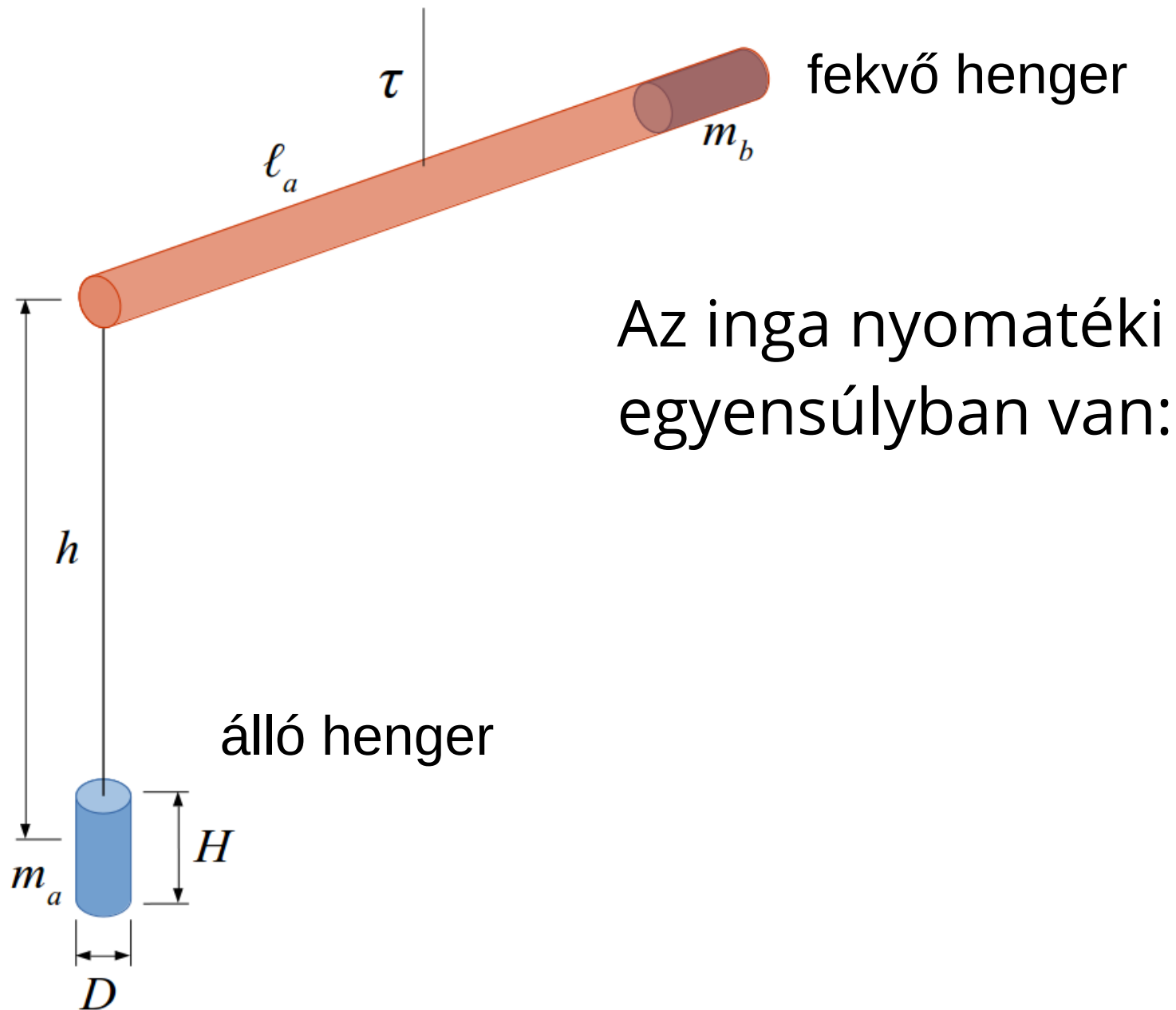
a g nehézségi erő (eredő erő)
irányváltozását eredményezi:

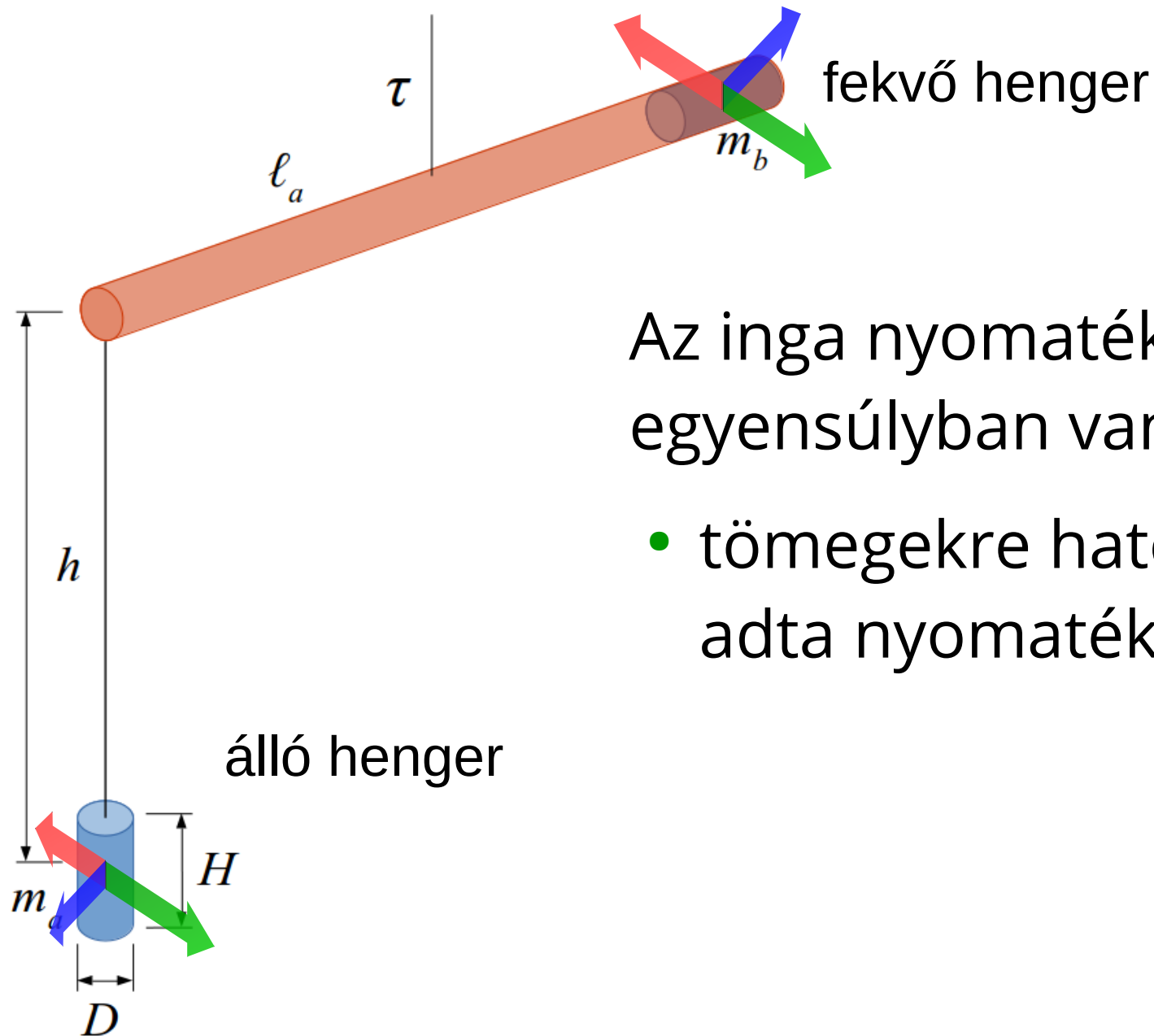
$$\varepsilon - \varepsilon' = -\frac{G}{g} \kappa \sin \varepsilon$$

κ : anyagi minőségtől függő tényező

Fellépő erők egy tömegpontra

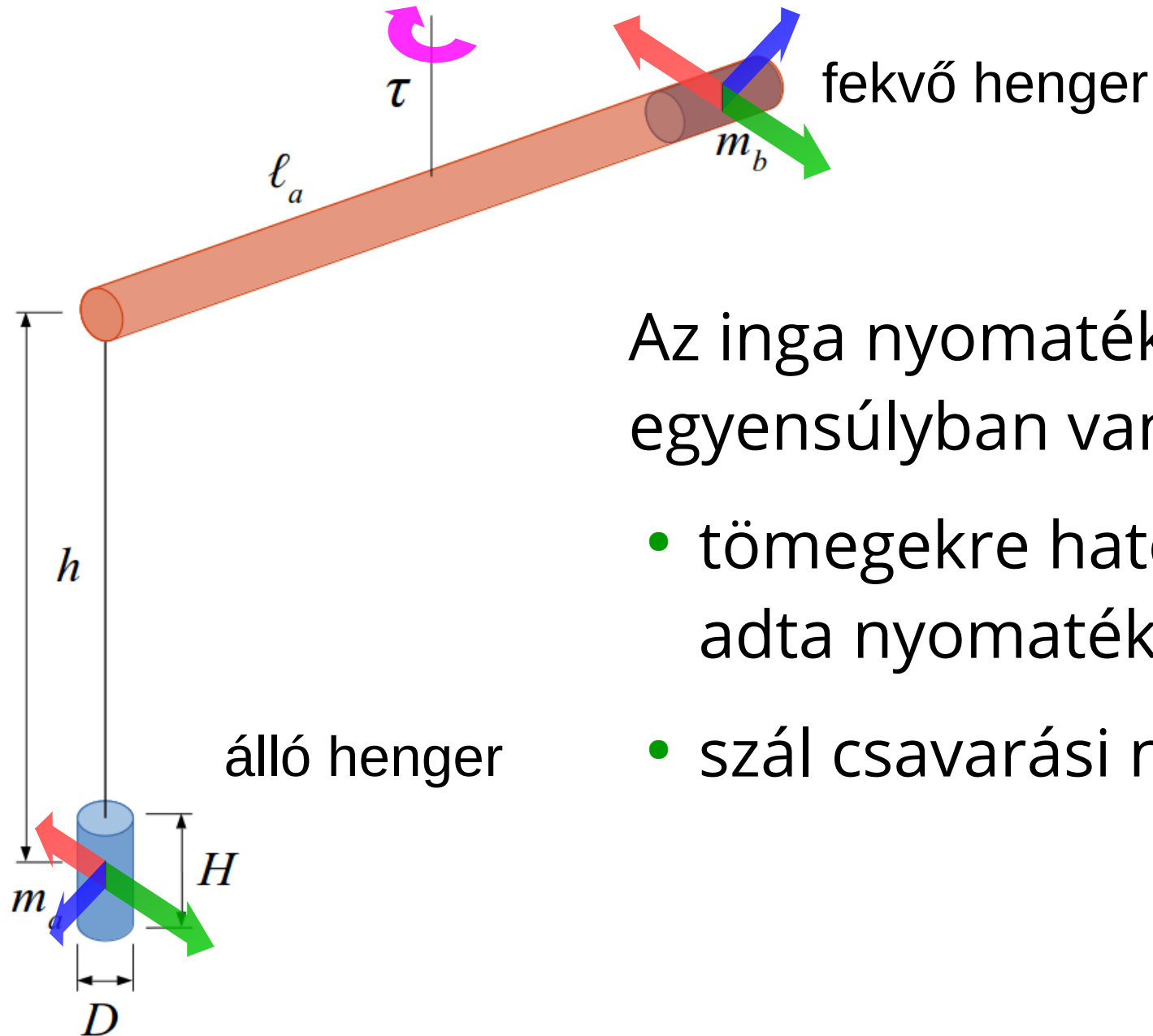






Az inga nyomatéki
egyensúlyban van:

- tömegekre ható erők
adta nyomatékok



Az inga nyomatéki
egyensúlyban van:

- tömegekre ható erők
adta nyomatékok
- szál csavarási nyomatéka

Az ingára erősített tömegek

- a rúdon levő ' b ' tömeg mindig Pt (platina) henger volt
- a lejjebb levő ' a ' tömeg Pt helyett különböző anyagokra lett cserélve
- az ' a ' tömeg alakja *álló tengelyű henger* volt, melynek eltérő méreteit gondosan megmérték és feljegyezték



A hengerek méretei

TABLE XI
Physical Sizes of Samples or Containers

Samples compared	Sample			Standard		
	L	D	ρ	L	D	ρ
Magnalium-Pt	11.92	1.01	2.50	6.01	0.50	21.45
Snakewood-Pt	24.00	1.01	1.35	6.01	0.50	21.45
Cu-Pt	6.40	0.77	8.92	6.00	0.50	21.45
Ag-Fe-SO ₄	12.91	1.16	1.96	12.91	1.16	1.96
H ₂ O-Cu	14.14	1.16	1.00	6.50	0.77	8.92
CuSO ₄ · 5H ₂ O-Cu	12.99	1.16	2.28	8.01	1.16	8.92
CuSO ₄ (sol'n)-Cu	13.50	1.16	1.42	8.01	1.16	8.92
Asbestos-Cu	12.99	1.16	2.50	8.01	1.16	8.92
Tallow-Cu	15.60	1.16	0.90	8.01	1.16	8.92

Note. Here L is the length of the sample or container, D its diameter, and ρ the density of the sample. All quantities are in c.g.s. units.

Fischbach et al. Annals of Phys 182, 1-89 (1988)



Mérések és eredmények

- mérések:

n_E, n_K, n_D, n_{Ny} kar helyzetére vonatkozó
leolvasások

- É-D (meridián) irányú leolvasások különbsége: m
- K-Ny (első vertikális) irányú leolvasások különbsége: v

- eredmények:

$\kappa_a - \kappa'_a$ anyagi tényezők különbsége



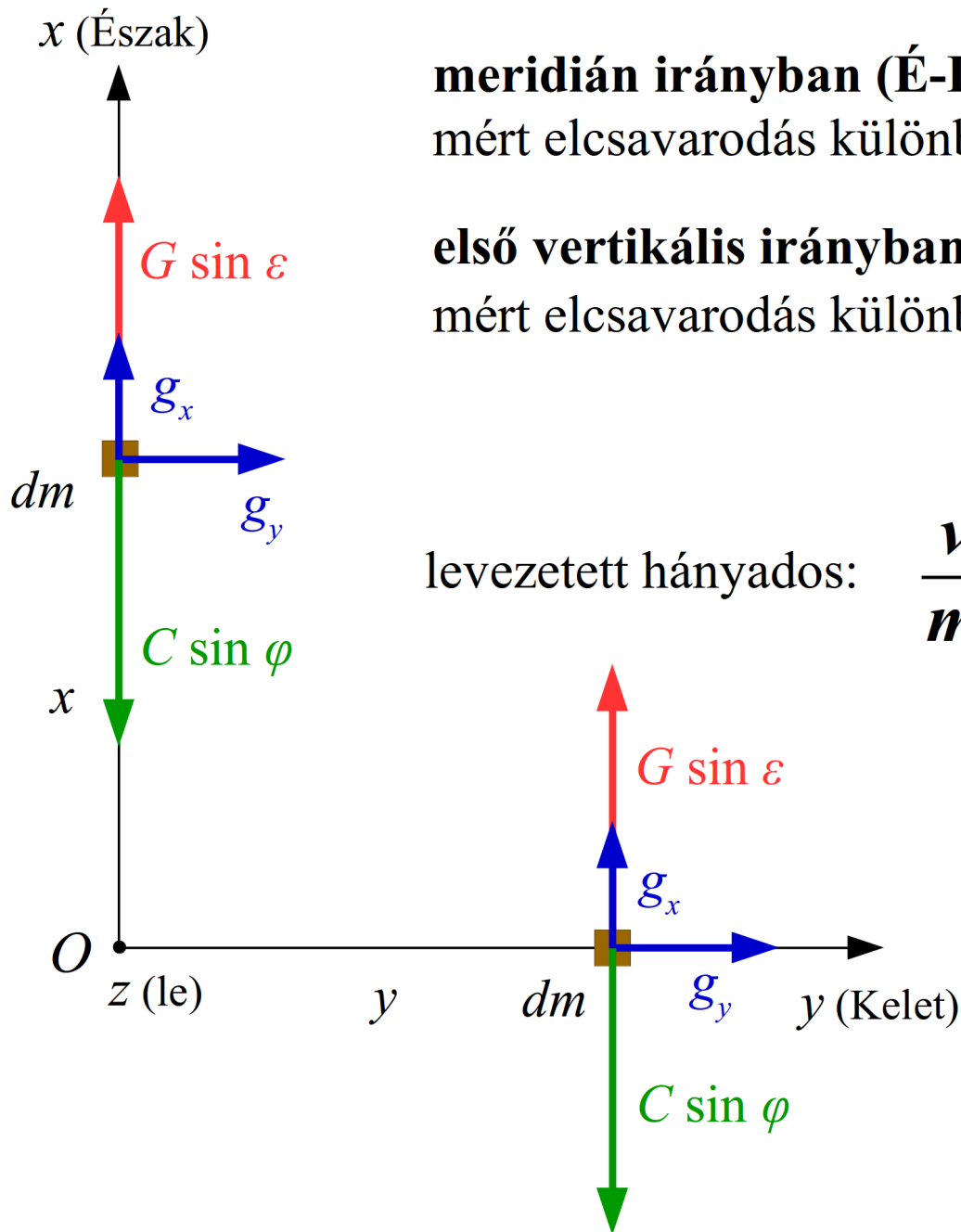
Eötvös háromféle eljárása

- 1) a nehézségi erőter és a szál csavarási nyomatéka állandó
- 2) a nehézségi erőter állandó, de a szál csavarási nyomatéka változhat
- 3) sem az erőter állandósága, sem a torziós szál változatlansága nem feltétel

mindegyik eljárásnál az ' a ' tömeg helyzete szerint az ingát 4 különböző ($\acute{E}$, K , D , N_y) azimut állásban észlelték



Eötvös módszere: v/m



meridián irányban (É-D)
mért elcsavarodás különbség: m

első vertikális irányban (K-Ny)
mért elcsavarodás különbség: v

levezetett hányados: $\frac{v}{m} \rightarrow \Delta\kappa$: anyagi minőségtől függő tényezők eltérése

Alapegyenletek (EPF)

$$\frac{v}{m} = -\frac{U_{xz}}{U_{yz}} + \frac{2K}{\tau} \frac{U_{xz}}{U_{yz}} (U_{yy} - U_{xx}) - \left(\frac{v^2}{m^2} + 1 \right) \Delta\alpha - \frac{v^2}{m^2} \frac{m}{4L} - \frac{2n_N - n_E - n_W}{4L} + \frac{4L}{m\tau} M_a \ell_a G \sin \varepsilon (\kappa_a - \kappa_b)$$

- az ' a ' tömeg kicserélése után:

$$\frac{v'}{m'} = -\frac{U_{xz}}{U_{yz}} + \frac{2K}{\tau} \frac{U_{xz}}{U_{yz}} (U_{yy} - U_{xx}) - \left(\frac{v'^2}{m'^2} + 1 \right) \Delta\alpha' - \frac{v'^2}{m'^2} \frac{m'}{4L} - \frac{2n'_N - n'_E - n'_W}{4L} + \frac{4L}{m'\tau} M'_a \ell_a G \sin \varepsilon (\kappa'_a - \kappa_b)$$



A második módszer

- A második módszer alapegyenlete

$$\frac{v}{m} - \frac{v'}{m'} = \frac{4 LM_a \ell_a G \sin \varepsilon}{m \tau} (\kappa_a - \kappa'_a) - \left(\frac{v^2}{m^2} + 1 \right) (\Delta\alpha - \Delta\alpha')$$

- Lényeges feltétel: az erőter nem változik
(U_{xz} , U_{yz} állandóak, ezért a különbségképzés során ez a hatás kiesik)
- Egyetlen inga, a felfüggesztett tömegek cseréjével



A harmadik módszer

- A harmadik módszer alapegyenlete

$$\left(\frac{v_1}{m_1} - \frac{v'_2}{m'_2}\right) + \left(\frac{v_2}{m_2} - \frac{v'_1}{m'_1}\right) = \frac{8 LM_a \ell_a G \sin \varepsilon}{m \tau} (\kappa_a - \kappa'_a) +$$

$$+ \left(\frac{v^2}{m^2} + 1\right) [(\Delta\alpha_{2I} - \Delta\alpha'_{2II}) - (\Delta\alpha_{1I} - \Delta\alpha'_{1II})]$$

- Kettős antiparallel inga, két mérési sorozat (I, II) a felfüggesztett tömegek cseréjével
- Sem az erőter állandósága, sem a torziós szál változatlansága nem feltétel



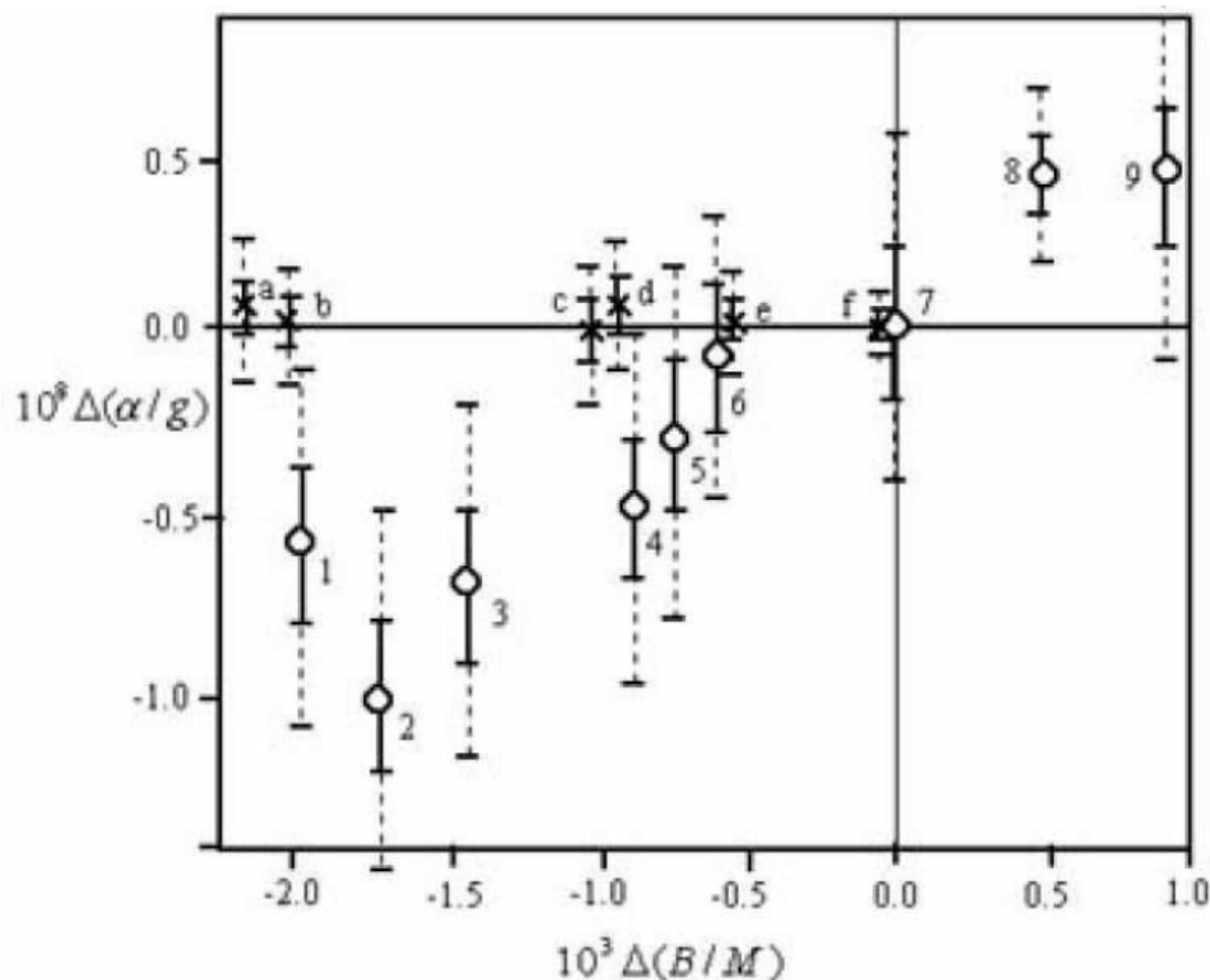
Anyagi tényező különbségek

$$\kappa - \kappa_{Pt}$$

Magnárium	+ 0,004 · 10 ⁻⁸ ± 0,001 · 10 ⁻⁸
Schlangenholz	- 0,001 · 10 ⁻⁸ ± 0,002 · 10 ⁻⁸
Kupfer	+ 0,004 · 10 ⁻⁸ ± 0,002 · 10 ⁻⁸
Wasser	- 0,006 · 10 ⁻⁸ ± 0,003 · 10 ⁻⁸
Kristall. Kupfersulfat	- 0,001 · 10 ⁻⁸ ± 0,003 · 10 ⁻⁸
Kupfersulfatlösung	- 0,003 · 10 ⁻⁸ ± 0,003 · 10 ⁻⁸
Asbest	+ 0,001 · 10 ⁻⁸ ± 0,003 · 10 ⁻⁸
Talg	- 0,002 · 10 ⁻⁸ ± 0,003 · 10 ⁻⁸



Korreláció a (B/M) hányadossal



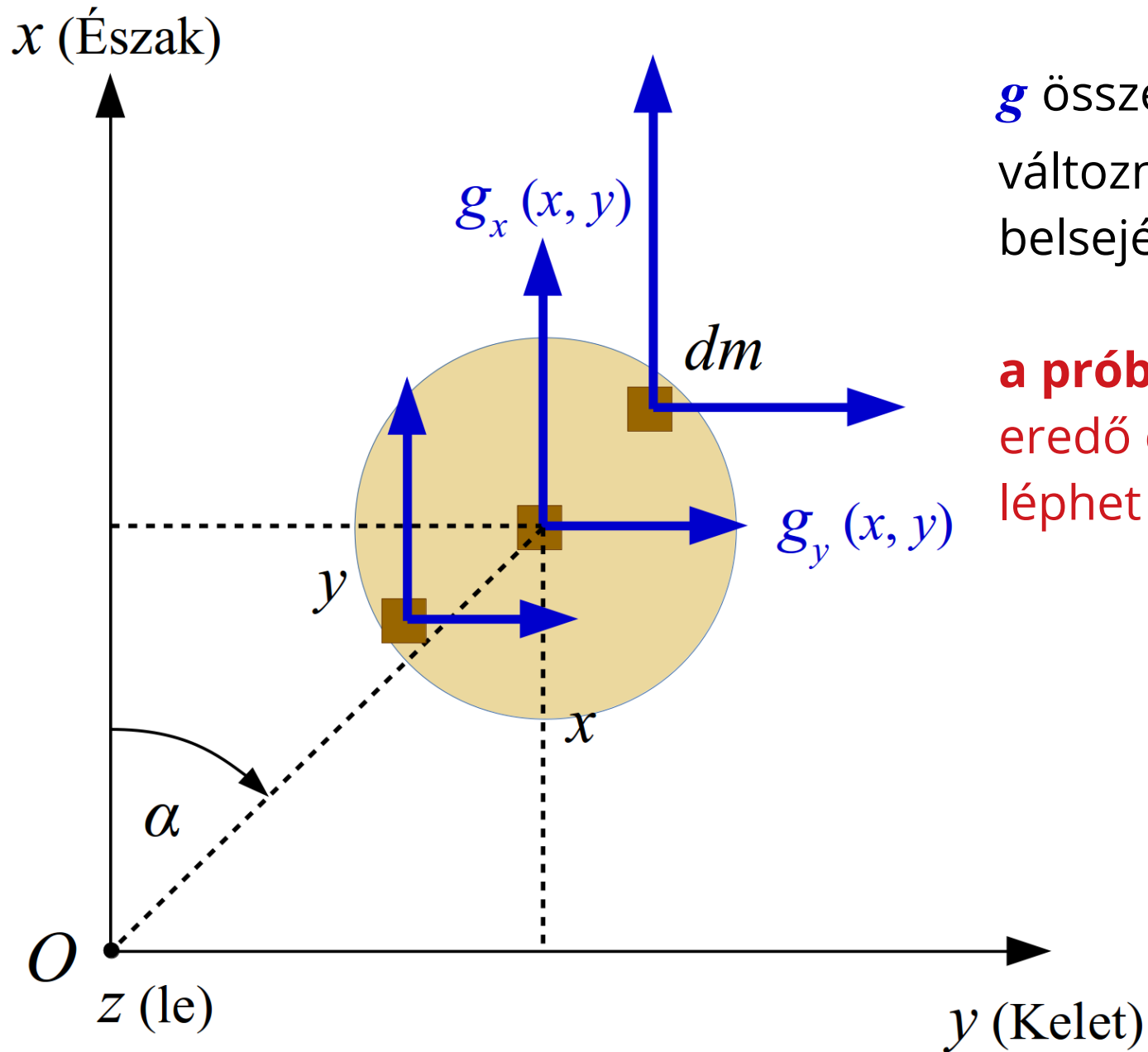
1. ábra. A számmal jelzett pontok az EPF, a betűvel jelzettek a Renner-mérések eredményét adják, az eredeti és annál 2,4-szer nagyobb hibával ([8] alapján). Renner eredményeinél nem látszik szisztematikus függés a B/M értékek különbségétől, de a zérustól való eltérések a vártnál kisebbek. Az anyagpárok megnevezését lásd [8]-ban.

Előzmények

- BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék vizsgálatai a Csepel-szigeten és a Mátyáshegyi barlangban:
 - Eötvös-inga mérések (E-54 és Auterbal ingákkal) (Völgyesi L., Csapó G., Ultmann Z., Laky S.)
 - a mérések *tömeghatásának* vizsgálata, *tömegmodell* készítése (Égető Csaba)
 - *az inga alapegyenletének* vizsgálata, *pontosítása*: magasabb rendű tagok, beállási azimut eltérés (Tóth Gy.- Égető Cs., 2012)
 - PhD értekezések (Ultmann Zita, 2013, *Égető Csaba*, 2014)
 - Eötvös-kísérlet, újramérés (*Ván Péter* megkeresése, 2017)



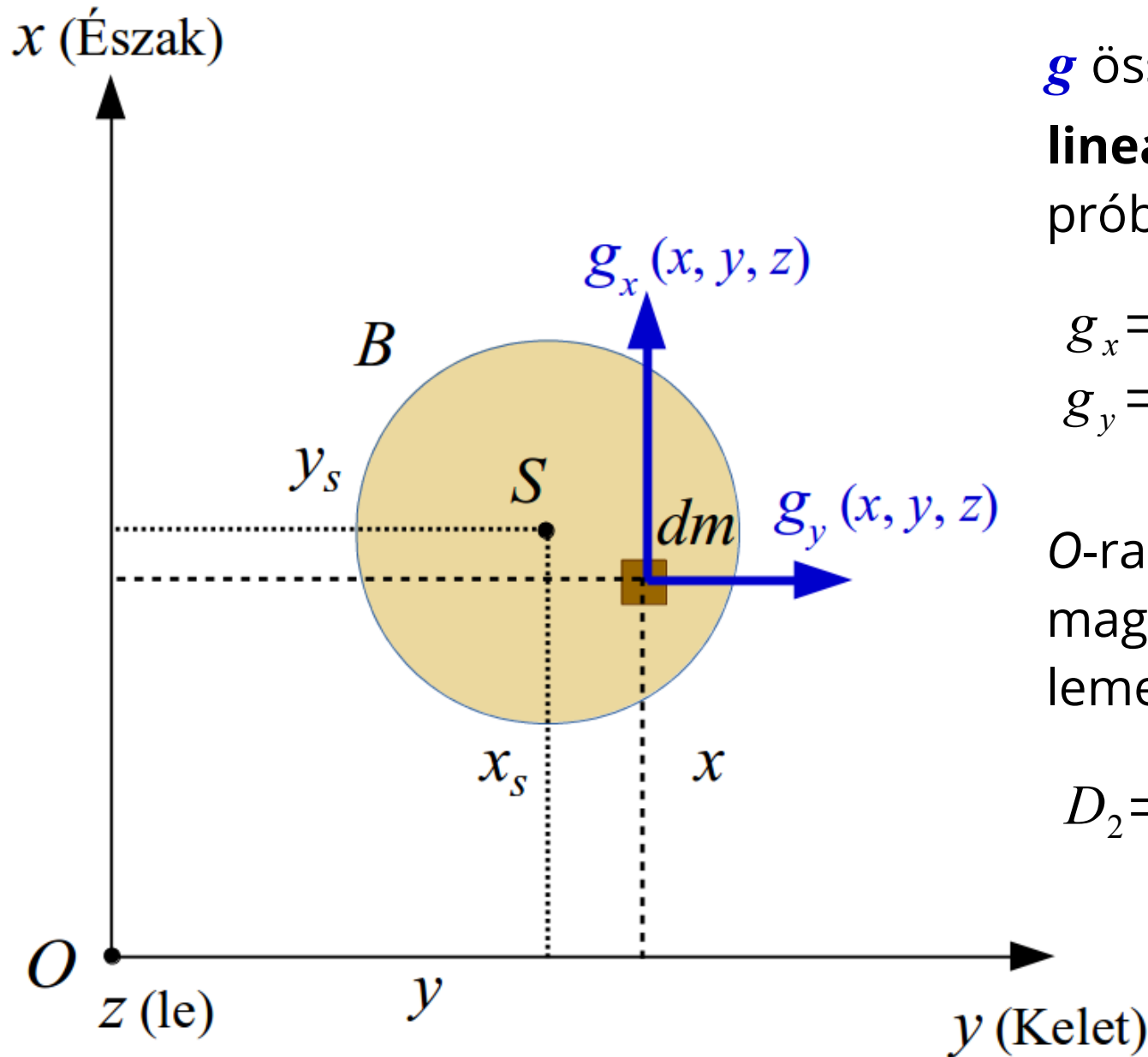
Nem tömegpontra hatnak az erők...



$\mathbf{g}$ összetevői (g_x, g_y)
változnak a próbatestest
belsejében:

a próbatest alakjától függő
eredő erő (és nyomaték)
léphet fel

Eredő nyomaték sík lemezre



$\mathbf{g}$ összetevői (g_x, g_y)

lineárisan változnak a
próbatest belsejében

$$g_x = U_{xx}x + U_{xy}y + U_{xz}z$$

$$g_y = U_{yx}x + U_{yy}y + U_{yz}z$$

O-ra vett **nyomaték** dz
magasságú, ρ sűrűségű
lemezre

$$D_2 = \rho dz \int_B (x \cdot g_y - y \cdot g_x) dx dy$$

Nyomaték számítás lemezre

fajlagos nyomaték lineárisan változó erőre

$$\frac{D_2}{m_B} = U_{yz} x_s z - U_{xz} y_s z + U_{xy} (x_s^2 - y_s^2) + (U_{yy} - U_{xx}) x_s y_s +$$
$$+ \frac{U_{xy}}{A} (I_{y,s} - I_{x,s}) + \frac{U_{yy} - U_{xx}}{A} I_{xy,s}$$

Az első 4 tag **független a lemez alakjától**



Nyomaték számítás lemezre

fajlagos nyomaték lineárisan változó erőre

$$\frac{D_2}{m_B} = U_{yz} x_s z - U_{xz} y_s z + U_{xy} (x_s^2 - y_s^2) + (U_{yy} - U_{xx}) x_s y_s +$$

$$+ \frac{U_{xy}}{A} (I_{y,s} - I_{x,s}) + \frac{U_{yy} - U_{xx}}{A} I_{xy,s}$$

Az első 4 tag **független a lemez alakjától**

Az utolsó két tag zérus, ha 1) és 2) teljesülnek:

1) a lemez súlyponti x és y tengelyre vett $I_{x,s}$ és $I_{y,s}$ inerciája azonos
(pl. **négyzet**, **kör** alak),



Nyomaték számítás lemezre

fajlagos nyomaték lineárisan változó erőre

$$\frac{D_2}{m_B} = U_{yz} x_s z - U_{xz} y_s z + U_{xy} (x_s^2 - y_s^2) + (U_{yy} - U_{xx}) x_s y_s +$$
$$+ \frac{U_{xy}}{A} (I_{y,s} - I_{x,s}) + \frac{U_{yy} - U_{xx}}{A} I_{xy,s}$$

Az első 4 tag **független a lemez alakjától**

Az utolsó két tag zérus, ha 1) és 2) teljesülnek:

1) a lemez súlyponti x és y tengelyre vett $I_{x,s}$ és $I_{y,s}$ inerciája azonos
(pl. **négyzet**, **kör** alak),

2) az xy súlyponti tengelypárra vett I_{xy} centrifugális nyomaték zérus
(x, y vagy mindkét tengelyre szimmetrikus lemez)



Lineárisan változó nehézségi erő

- Vízszintes síkban *négyzet* és *kör* keresztmetszetű homogén próbatestre nem lép fel alak függő nyomaték
 - **henger** alakú homogén próbatestre (kör keresztmetszet miatt) lineárisan változó nehézségi erőterben nem hat alaktól függő nyomaték
- Nem azonos súlyponti tehetetlenségi nyomatékú keresztmetszetre (pl. *téglalap*) alaktól is függő nyomaték hat



Nem lineárisan változó nehézségi erő

- Taylor-sor formalizmus D_n ($n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$) nyomatéki tagok számításához (henger koordináta rendszerben)

$$D_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^n U|_{\vec{r}=0} \quad (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) = (r_h \cos \theta \partial_x, r_h \sin \theta \partial_y, z \partial_z)$$

$$\sum_{i=2}^4 D_i = \sum_{k=1}^4 (C_k \cos k\alpha + S_k \sin k\alpha) \quad \alpha: \text{ingakar azimutja}$$

- A D_2, D_3, D_4 tagjainak számítása, integrálás a próbatestek tömegeire (I_{ik} **csatolási együttthatók** álló és fekvő hengerekre)
- Levezetések számítógépes algebrai rendszerben (SymPy)



Order 4:

18 nyomatéki tag

derivative operator applied to U:

Factor of $\sin(\alpha)$:

$$- \frac{U_{xxxz} \cdot x \cdot z \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{y}}{8} - \frac{U_{xyyz} \cdot x \cdot z \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{y}}{8} - \frac{U_{xzzz} \cdot x \cdot z^3}{6}$$

Factor of $\cos(\alpha)$:

$$\frac{U_{xxyz} \cdot x \cdot z \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{y}}{8} + \frac{U_{yyyz} \cdot x \cdot z \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{y}}{8} + \frac{U_{yzzz} \cdot x \cdot z^3}{6}$$

Factor of $\sin(2\alpha)$:

$$- \frac{U_{xxxx} \cdot (x - y) \cdot (x + y) \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{y}}{24} - \frac{U_{xxzz} \cdot z^2 \cdot (x - y) \cdot (x + y)}{4} + \frac{U_{yyyy} \cdot (x - y) \cdot (x + y) \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{y}}{24} + \frac{U_{yyzz} \cdot z^2 \cdot (x - y) \cdot (x + y)}{4}$$

Factor of $\cos(2\alpha)$:

$$\frac{U_{xxxy} \cdot (x - y) \cdot (x + y) \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{y}}{12} + \frac{U_{xyyy} \cdot (x - y) \cdot (x + y) \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{y}}{12} + \frac{U_{xyzz} \cdot z^2 \cdot (x - y) \cdot (x + y)}{2}$$

Factor of $\sin(3\alpha)$:

$$- \frac{U_{xxxz} \cdot x \cdot z \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{3 \cdot y}}{8} + \frac{3 \cdot U_{xyyz} \cdot x \cdot z \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{3 \cdot y}}{8}$$

Factor of $\cos(3\alpha)$:

$$\frac{3 \cdot U_{xxyz} \cdot x \cdot z \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{3 \cdot y}}{8} - \frac{U_{yyyz} \cdot x \cdot z \cdot \binom{2}{x} \binom{2}{3 \cdot y}}{8}$$



18 csatolási együttható (álló és fekvő hengerre)

```
print()
print("Order 3")
print()

# I31 coefficient
i31 = x*(x**2 + y**2 - 4*z**2)
i31 = i31.subs({x:r*cos(a)+x0,y:r*sin(a)+y0})
I31 = simplify(integrate(r*i31,(a,0,2*pi),(r,0,d/2),(z,z0-H/2,z0+H/2)))
#pprint(I31)
# 
$$\frac{\pi \cdot H \cdot d \cdot x_0 \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 12 \cdot x_0^2 + 12 \cdot y_0^2 - 48 \cdot z_0^2 \right)}{48}$$

#
I31 = I31.subs({H*d**2*pi/4:m})
print("I31:")
pprint(I31)
print()
# 
$$\frac{\pi \cdot x_0 \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 12 \cdot x_0^2 + 12 \cdot y_0^2 - 48 \cdot z_0^2 \right)}{12}$$

#

# I32 coefficient
i32 = x**2*z - y**2*z
i32 = i32.subs({x:r*cos(a)+x0,y:r*sin(a)+y0})
I32 = simplify(integrate(r*i32,(a,0,2*pi),(r,0,d/2),(z,z0-H/2,z0+H/2)))
#pprint(I32)
# 
$$\frac{\pi \cdot H \cdot d \cdot z_0 \cdot \left( x_0^2 - y_0^2 \right)}{4}$$

#
I32 = I32.subs({H*d**2*pi/4:m})
print("I32:")
pprint(I32)
print()
# 
$$\pi \cdot z_0 \cdot \left( x_0^2 - y_0^2 \right)$$

#
```

```
print()
print("Order 4")
print()

# I41 coefficient
i41 = x*z*(3*x**2 + 3*y**2 - 4*z**2)
i41 = i41.subs({x:r*cos(a)+x0,y:r*sin(a)+y0})
I41 = simplify(integrate(r*i41,(a,0,2*pi),(r,0,d/2),(z,z0-H/2,z0+H/2)))
#pprint(I41)
# 
$$\frac{\pi \cdot H \cdot d \cdot x_0 \cdot z_0 \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 12 \cdot x_0^2 + 12 \cdot y_0^2 - 16 \cdot z_0^2 \right)}{16}$$

#
I41 = I41.subs({H*d**2*pi/4:m})
print("I41:")
pprint(I41)
print()
# 
$$\pi \cdot x_0 \cdot z_0 \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 12 \cdot x_0^2 + 12 \cdot y_0^2 - 16 \cdot z_0^2 \right)$$

#
# 
$$4$$


# I42 coefficient
i42 = (x - y)*(x + y)*(x**2 + y**2 - 6*z**2)
i42 = i42.subs({x:r*cos(a)+x0,y:r*sin(a)+y0})
I42 = simplify(integrate(r*i42,(a,0,2*pi),(r,0,d/2),(z,z0-H/2,z0+H/2)))
#pprint(factor(I42))
# 
$$\frac{\pi \cdot H \cdot d \cdot (x_0 - y_0) \cdot (x_0 + y_0) \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 8 \cdot x_0^2 + 8 \cdot y_0^2 - 48 \cdot z_0^2 \right)}{32}$$

#
I42 = I42.subs({H*d**2*pi/4:m})
print("I42:")
pprint(factor(I42))
print()
# 
$$\pi \cdot (x_0 - y_0) \cdot (x_0 + y_0) \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 8 \cdot x_0^2 + 8 \cdot y_0^2 - 48 \cdot z_0^2 \right)$$

#
# 
$$8$$

```



megjelennek a henger alaktól (H, d) függő csatolási együtthatók (álló henger)

```
print()
print("Order 3")
print()

# I31 coefficient
i31 = x*(x**2 + y**2 - 4*z**2)
i31 = i31.subs({x:r*cos(a)+x0,y:r*sin(a)+y0})
I31 = simplify(integrate(r*i31,(a,0,2*pi),(r,0,d/2),(z,z0-H/2,z0+H/2)))
#pprint(I31)
# 
$$\frac{\pi \cdot H \cdot d \cdot x_0 \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 12 \cdot x_0^2 + 12 \cdot y_0^2 - 48 \cdot z_0^2 \right)}{48}$$

#
I31 = I31.subs({H*d**2*pi/4:m})
print("I31:")
pprint(I31)
print()
# 
$$\frac{\pi \cdot x_0 \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 12 \cdot x_0^2 + 12 \cdot y_0^2 - 48 \cdot z_0^2 \right)}{12}$$

#
```

```
# I32 coefficient
i32 = x**2*z - y**2*z
i32 = i32.subs({x:r*cos(a)+x0,y:r*sin(a)+y0})
I32 = simplify(integrate(r*i32,(a,0,2*pi),(r,0,d/2),(z,z0-H/2,z0+H/2)))
#pprint(I32)
# 
$$\frac{\pi \cdot H \cdot d \cdot z_0 \cdot \left( x_0^2 - y_0^2 \right)}{4}$$

#
I32 = I32.subs({H*d**2*pi/4:m})
print("I32:")
pprint(I32)
print()
# 
$$\pi \cdot z_0 \cdot \left( x_0^2 - y_0^2 \right)$$

#
```

```
print()
print("Order 4")
print()

# I41 coefficient
i41 = x*z*(3*x**2 + 3*y**2 - 4*z**2)
i41 = i41.subs({x:r*cos(a)+x0,y:r*sin(a)+y0})
I41 = simplify(integrate(r*i41,(a,0,2*pi),(r,0,d/2),(z,z0-H/2,z0+H/2)))
#pprint(I41)
# 
$$\frac{\pi \cdot H \cdot d \cdot x_0 \cdot z_0 \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 12 \cdot x_0^2 + 12 \cdot y_0^2 - 16 \cdot z_0^2 \right)}{16}$$

#
I41 = I41.subs({H*d**2*pi/4:m})
print("I41:")
pprint(I41)
print()
# 
$$\pi \cdot x_0 \cdot z_0 \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 12 \cdot x_0^2 + 12 \cdot y_0^2 - 16 \cdot z_0^2 \right)$$

#
```

```
# I42 coefficient
i42 = (x - y)*(x + y)*(x**2 + y**2 - 6*z**2)
i42 = i42.subs({x:r*cos(a)+x0,y:r*sin(a)+y0})
I42 = simplify(integrate(r*i42,(a,0,2*pi),(r,0,d/2),(z,z0-H/2,z0+H/2)))
#pprint(factor(I42))
# 
$$\frac{\pi \cdot H \cdot d \cdot (x_0 - y_0) \cdot (x_0 + y_0) \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 8 \cdot x_0^2 + 8 \cdot y_0^2 - 48 \cdot z_0^2 \right)}{32}$$

#
I42 = I42.subs({H*d**2*pi/4:m})
print("I42:")
pprint(factor(I42))
print()
# 
$$\pi \cdot (x_0 - y_0) \cdot (x_0 + y_0) \cdot \left( -4 \cdot H^2 + 3 \cdot d^2 + 8 \cdot x_0^2 + 8 \cdot y_0^2 - 48 \cdot z_0^2 \right)$$

#
```



Alakfüggő (■) csatolási együtthatók

álló henger	
l_{21}	●
l_{22}	●
l_{31}	■
l_{32}	●
l_{33}	●
l_{41}	■
l_{42}	■
l_{43}	●
l_{44}	●

fekvő henger	
l_{21}	●
l_{22}	■
l_{31}	■
l_{32}	■
l_{33}	■
l_{41}	■
l_{42}	■
l_{43}	■
l_{44}	■

Alakfüggő csatolási együtthatók

- függőleges tengelyű, (x_0, y_0, z_0) tömegközéppontú **hengerre** (D átmérő, H hossz) a csatolási együtthatók értéke:

$$I_{31} = m x_0 \left(4 z_0^2 - x_0^2 - y_0^2 + \frac{1}{3} H^2 - \frac{1}{4} D^2 \right)$$

$$I_{41} = -m x_0 z_0 \left(4 z_0^2 - x_0^2 - y_0^2 + H^2 - \frac{3}{4} D^2 \right)$$

$$I_{42} = m (x_0^2 - y_0^2) \left(6 z_0^2 - x_0^2 - y_0^2 + \frac{1}{2} H^2 - \frac{3}{8} D^2 \right)$$



Nyomatéki egyenlet tagjai

$$\sum_{i=2}^4 D_i = \sum_{k=1}^4 (C_k \cos k\alpha + S_k \sin k\alpha)$$

k	C_k	S_k
1	$U_{yz} I_{21} - \frac{1}{8} U_{yzz} I_{31} - \frac{1}{24} U_{yzzz} I_{41}$	$-U_{xz} I_{21} - \frac{1}{8} U_{xzz} I_{31} + \frac{1}{24} U_{xzzz} I_{41}$
2	$U_{xy} I_{22} + U_{xyz} I_{32} + \frac{1}{12} U_{xyzz} I_{42}$	$\frac{1}{2} U_{\Delta} I_{22} + \frac{1}{2} U_{\Delta z} I_{32} + \frac{1}{24} U_{\Delta zz} I_{42}$
3	$\frac{1}{8} (3 U_{xxy} - U_{yyy}) I_{33} + \frac{1}{8} (3 U_{xxyz} - U_{yyyz}) I_{43}$	$\frac{1}{8} (3 U_{xyy} - U_{xxx}) I_{33} + \frac{1}{8} (3 U_{xyyz} - U_{xxxz}) I_{43}$
4	$\frac{1}{12} (U_{xxxy} - U_{xyyy}) I_{44}$	$\frac{1}{48} (U_{xxzz} + U_{yyzz} + 8 U_{xyyz}) I_{44}$



Nyomatéki egyenlet tagjai

$$\sum_{i=2}^4 D_i = \sum_{k=1}^4 (C_k \cos k\alpha + S_k \sin k\alpha)$$

k	C_k	S_k
1	$U_{yz} I_{21} - \frac{1}{8} U_{yzz} I_{31} - \frac{1}{24} U_{yzzz} I_{41}$	$-U_{xz} I_{21} - \frac{1}{8} U_{xzz} I_{31} + \frac{1}{24} U_{xzzz} I_{41}$
2	$U_{xy} I_{22} + U_{xyz} I_{32} + \frac{1}{12} U_{xyzz} I_{42}$	$\frac{1}{2} U_{xz} I_{22} + \frac{1}{2} U_{xzz} I_{32} + \frac{1}{24} U_{xzzz} I_{42}$
3	$\frac{1}{8} (3 U_{xxy} - U_{yyy}) I_{33} + \frac{1}{8} (3 U_{xyyz} - U_{yyyz}) I_{43}$	$\frac{1}{8} (3 U_{xyy} - U_{xxx}) I_{33} + \frac{1}{8} (3 U_{xyyz} - U_{xxxz}) I_{43}$
4	$\frac{1}{12} (U_{xxxy} - U_{xyyy}) I_{44}$	$\frac{1}{48} (U_{xxzz} + U_{yyzz} + 8 U_{xyyz}) I_{44}$



Javított alapegyenlet

$$\begin{aligned} \frac{v}{m} = & \frac{S_1 - S_3}{C_1 + C_3} - \frac{C_1 - 3C_3}{C_1 + C_3} \left(\Delta \alpha + \frac{2n_N - n_E - n_W}{4L} \right) + \frac{S_2}{C_1 + C_3} \frac{v}{L} - \\ & - \frac{S_1 + 3S_3}{C_1 + C_3} \frac{v}{m} \left(\Delta \alpha + \frac{m}{4L} \right) - \frac{m_a l_a G \sin \varepsilon}{C_1 + C_3} (\kappa_a - \kappa_b) \end{aligned}$$

- a tömegek kicserélése után *az erőterhez való csatolás megváltozása miatt is van változás*
(még akkor is, ha nincs anyagi tényező változás):

$$\frac{v}{m} - \frac{v'}{m'} \approx \frac{S_1 - S_3}{C_1 + C_3} - \frac{S_1' - S_3}{C_1' + C_3} \approx \frac{S_1}{C_1} - \frac{S_1'}{C_1'}$$



Javított alapegyenlet

$$\frac{v}{m} = \frac{S_1 - S_3}{C_1 + C_3} - \frac{C_1 - 3C_3}{C_1 + C_3} \left(\Delta \alpha + \frac{2n_N - n_E - n_W}{4L} \right) + \frac{S_2}{C_1 + C_3} \frac{v}{L} -$$

$$- \frac{S_1 + 3S_3}{C_1 + C_3} \frac{v}{m} \left(\Delta \alpha + \frac{m}{4L} \right) - \frac{m_a l_a G \sin \varepsilon}{C_1 + C_3} (\kappa_a - \kappa_b)$$

- a tömegek kicserélése után *az erőterhez való csatolás megváltozása miatt is van változás*
(még akkor is, ha nincs anyagi tényező változás):

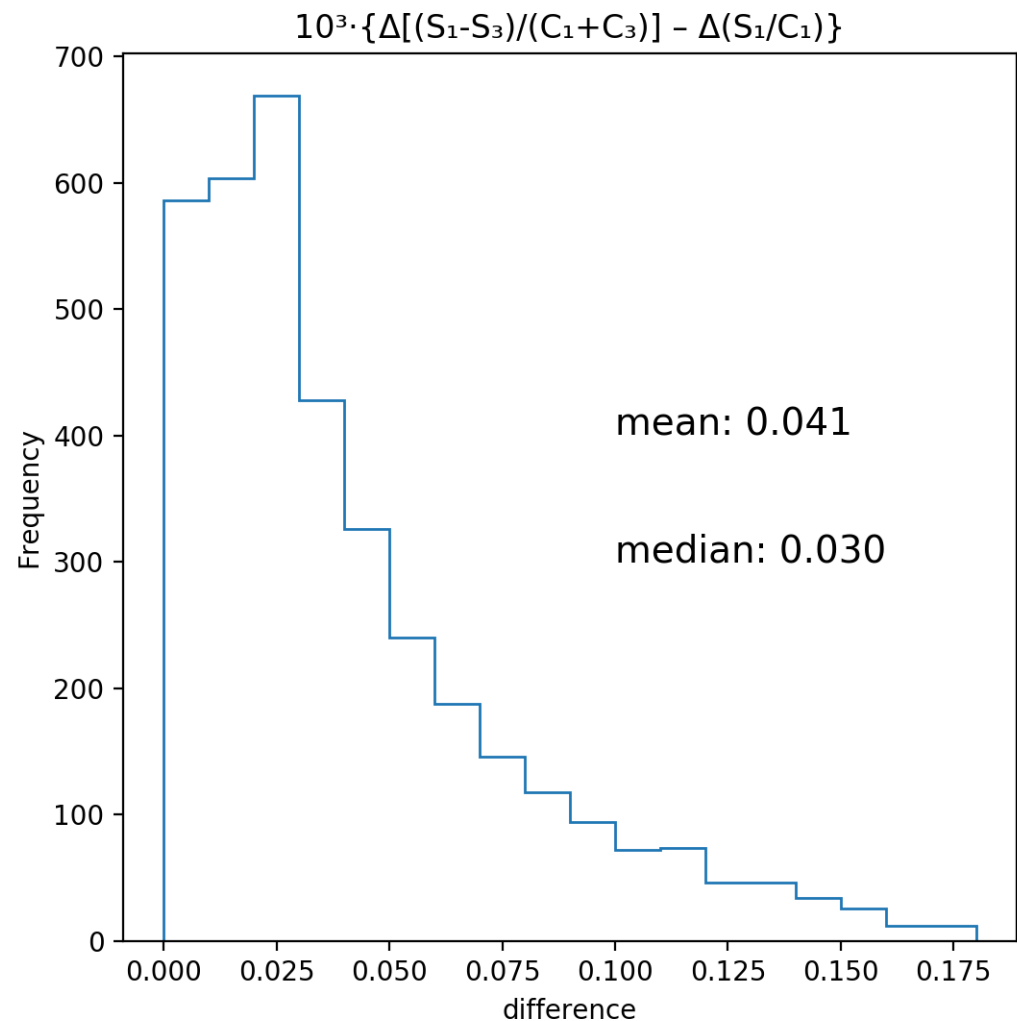
$$\frac{v}{m} - \frac{v'}{m'} \approx \frac{S_1 - S_3}{C_1 + C_3} - \frac{S_1' - S_3}{C_1' + C_3} \approx \frac{S_1}{C_1} - \frac{S_1'}{C_1'}$$

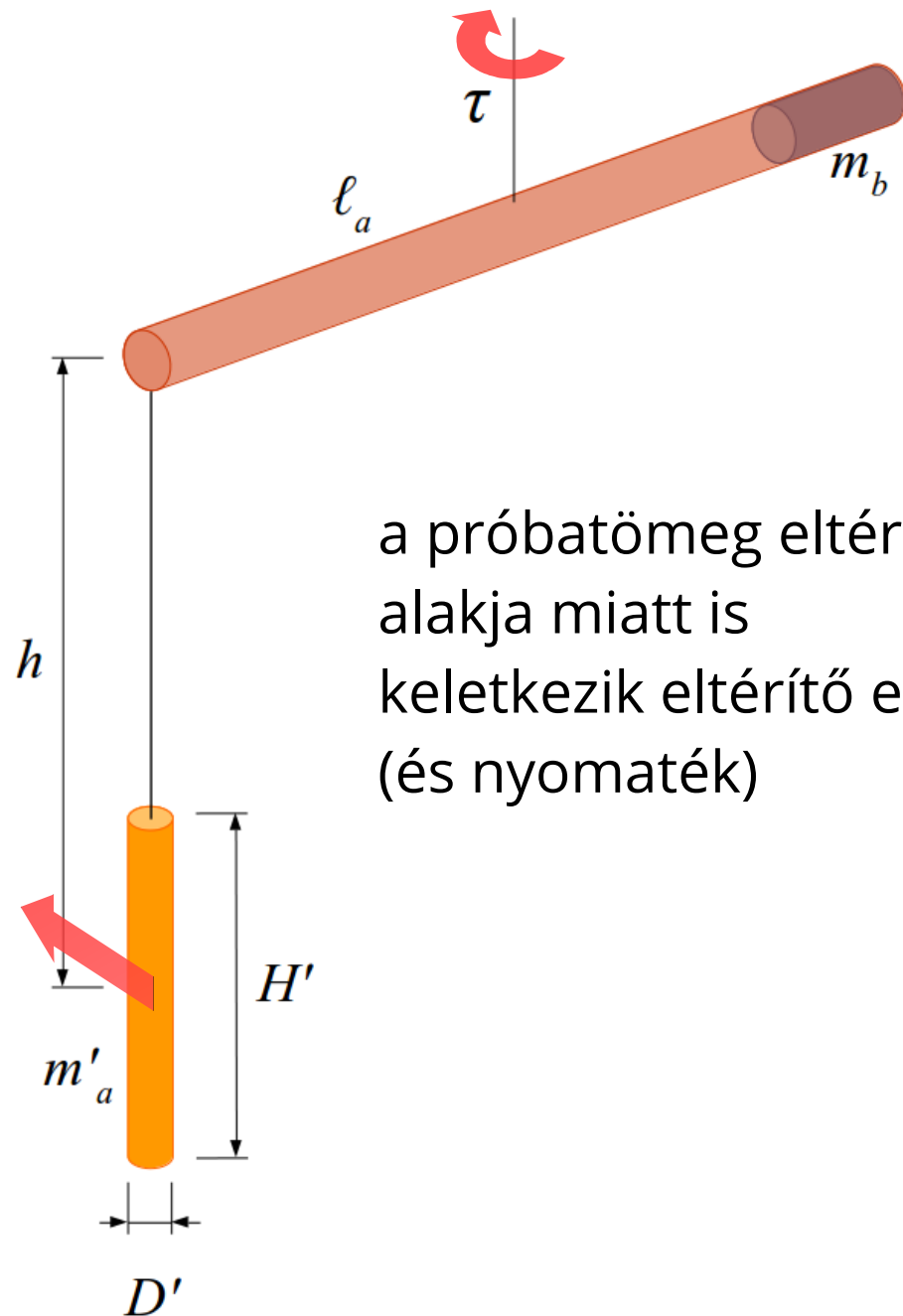
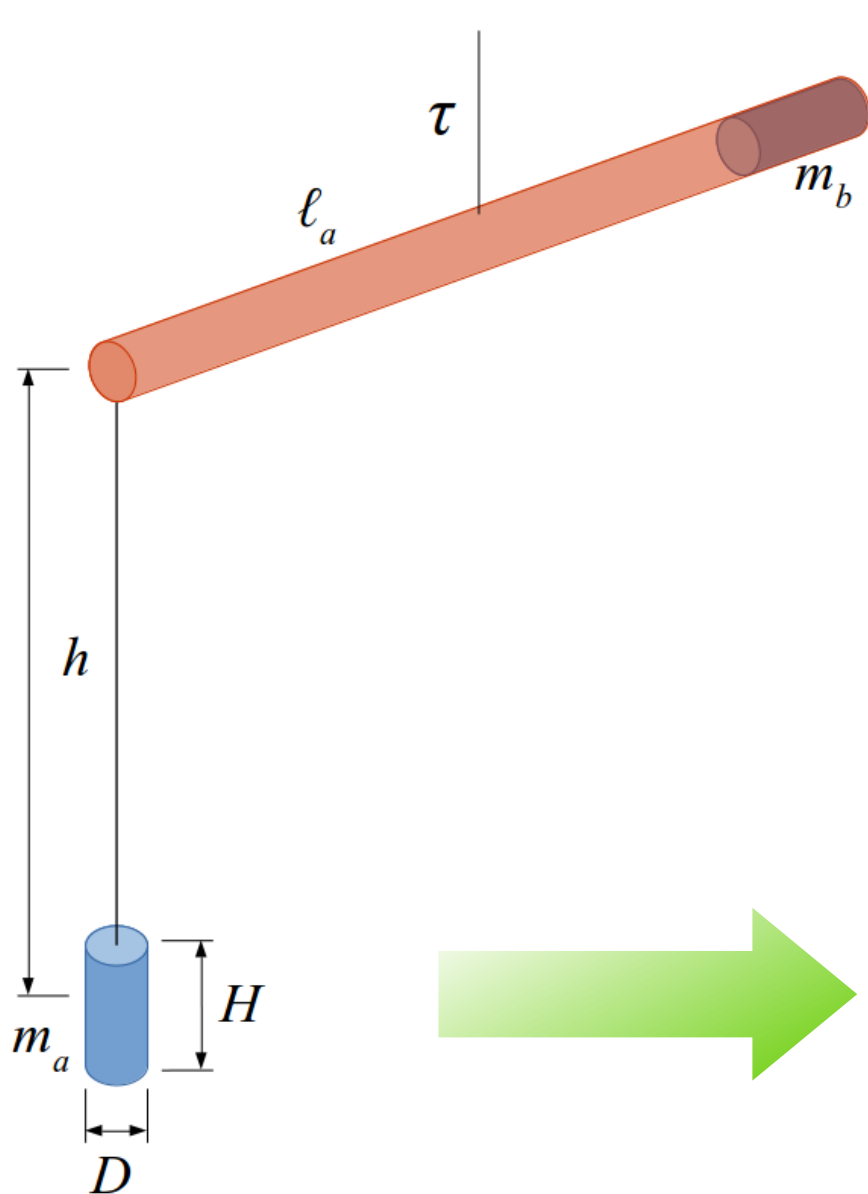


Közelítés vizsgálata

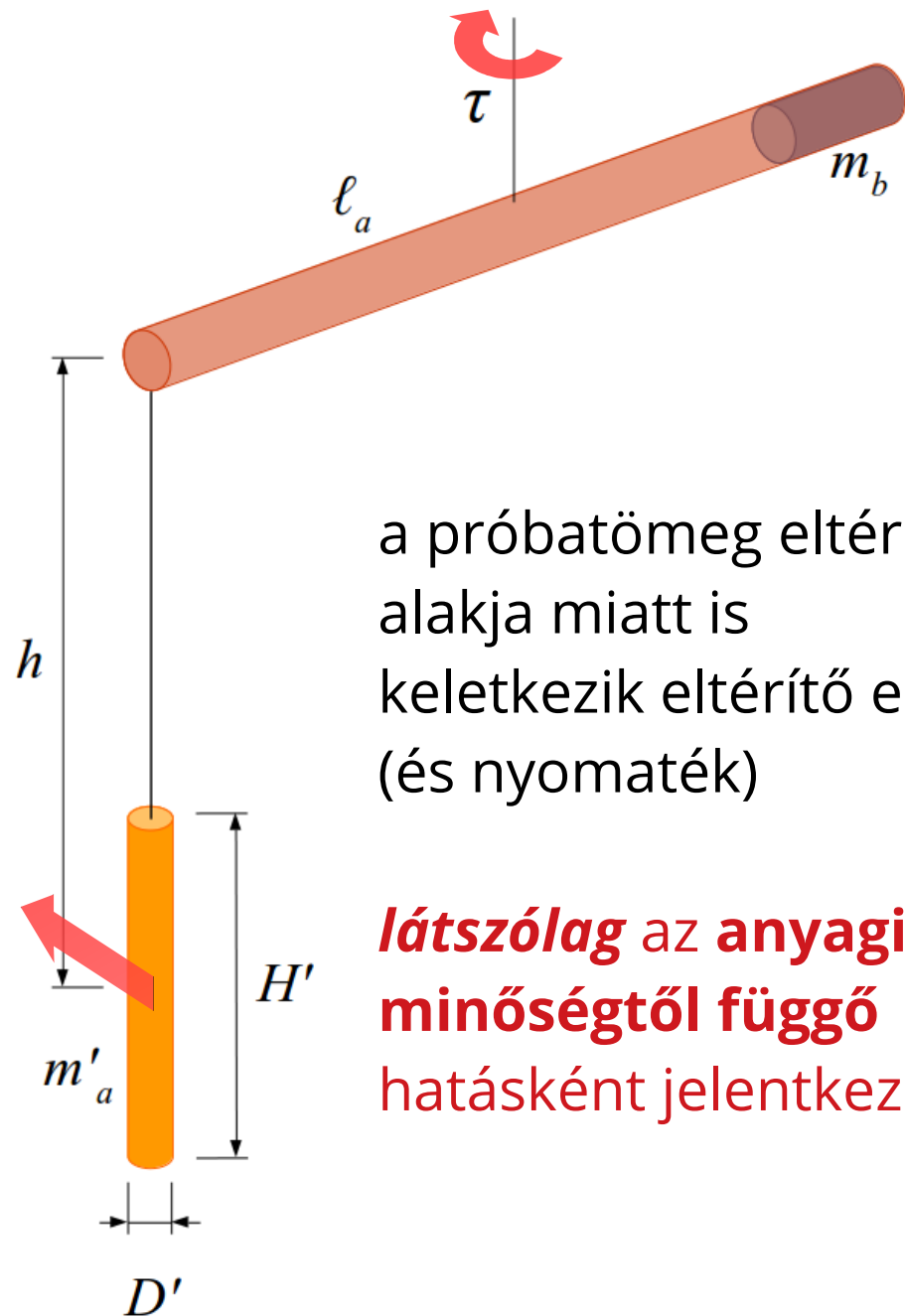
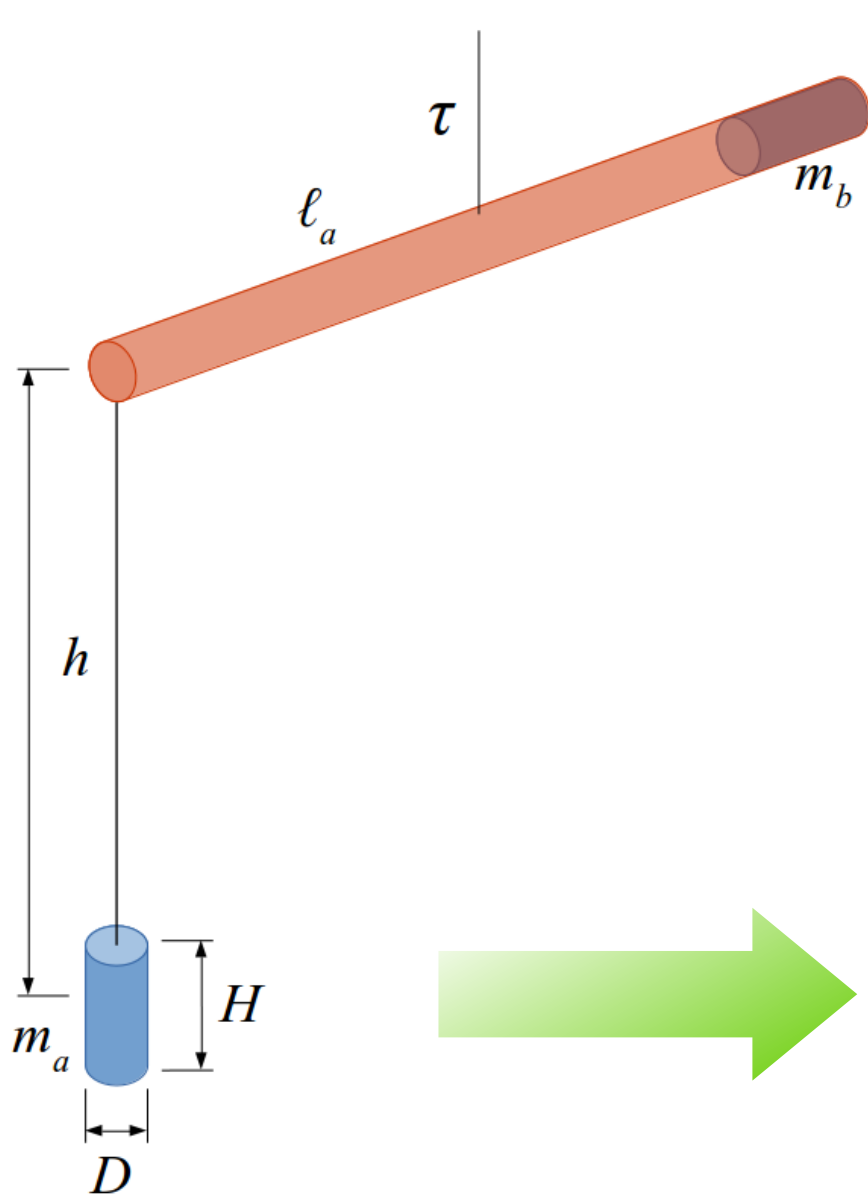
$$\frac{S_1 - S_3}{C_1 + C_3} - \frac{S_1' - S_3}{C_1' + C_3} \approx \frac{S_1}{C_1} - \frac{S_1'}{C_1'}$$

- Tömegmodellből
- max. 0.18 ‰ eltérés





a próbatömeg eltérő alakja miatt is keletkezik eltérítő erő (és nyomaték)



a próbatömeg eltérő alakja miatt is keletkezik eltérítő erő (és nyomaték)

látszólag az anyagi minőségtől függő hatásként jelentkezik

Próbatest csatolás változás hatása

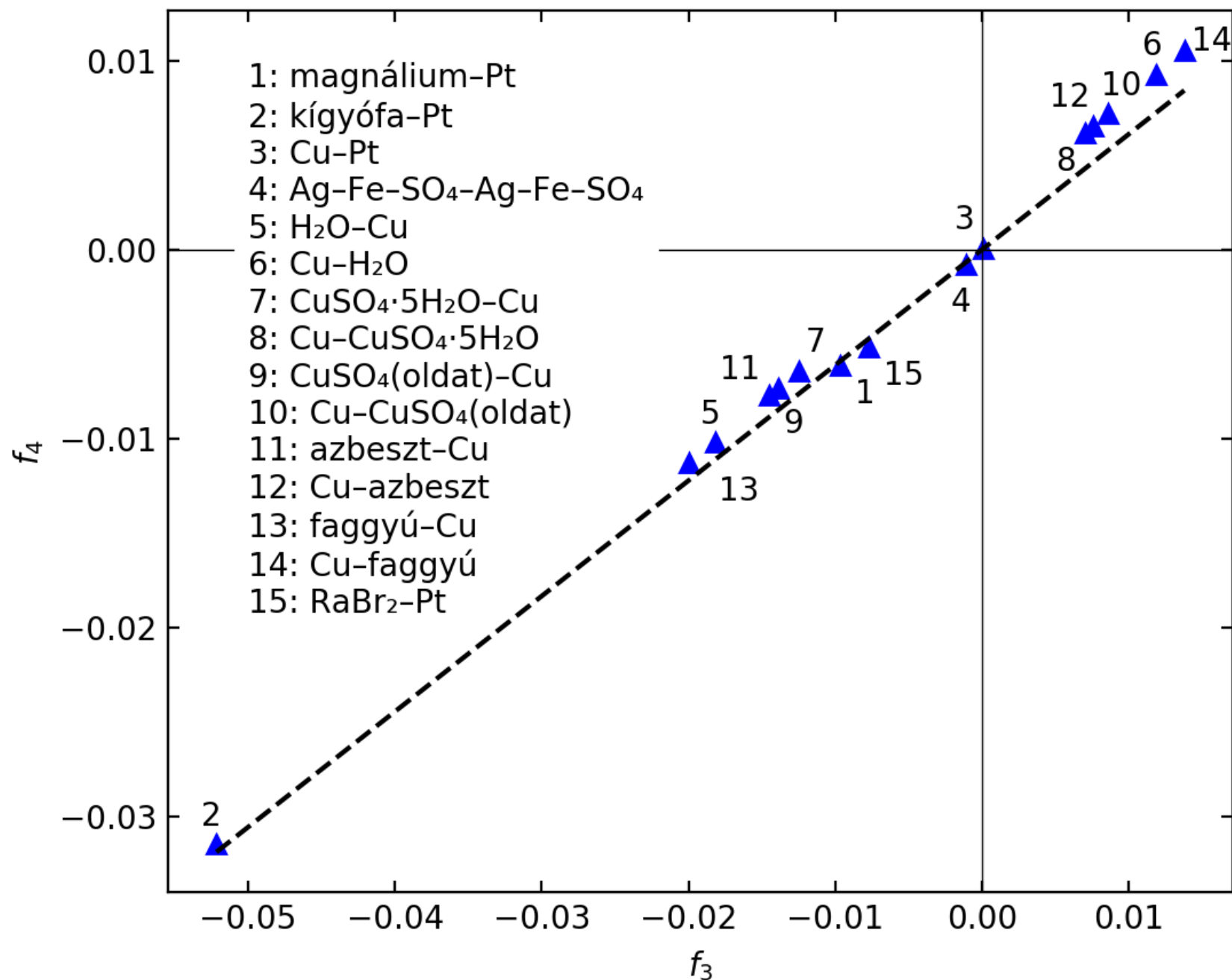
$$\begin{aligned} \frac{S_1}{C_1} - \frac{S_1'}{C_1'} &= -\frac{1}{8h} \left(\frac{I_{31}}{I_{21}} - \frac{I_{31}'}{I_{21}'} \right) \frac{U_{xz}}{U_{yz}} \left(\frac{h \cdot U_{xzz}}{U_{xz}} + \frac{h \cdot U_{yzz}}{U_{yz}} \right) + \\ &+ \frac{1}{12h^2} \left(\frac{I_{41}}{I_{21}} - \frac{I_{41}'}{I_{21}'} \right) \frac{U_{xz}}{U_{yz}} \left(\frac{h^2 \cdot U_{xzzz}}{2U_{xz}} - \frac{h^2 \cdot U_{yzzz}}{2U_{yz}} \right) = \\ &= \frac{U_{xz}}{U_{yz}} (f_3 B_3 + f_4 B_4) \end{aligned}$$

f_3, f_4 tömegek **alak**jának változása

B_3, B_4 **erőtér** szerkezete (nemlinearitás)



Alakváltozási tényezők



A **tömegek alakja** megjelenik a kiszámolt $\Delta \kappa$ anyagi tényezőkben,

$$\Delta \kappa = c \frac{U_{xz}}{U_{yz}} \left(f_3 B_3 + f_4 B_4 \right)$$

... és a mérés helyén és a mérés idejében
az erőter szerkezete alapvetően
befolyásolta az eredményt



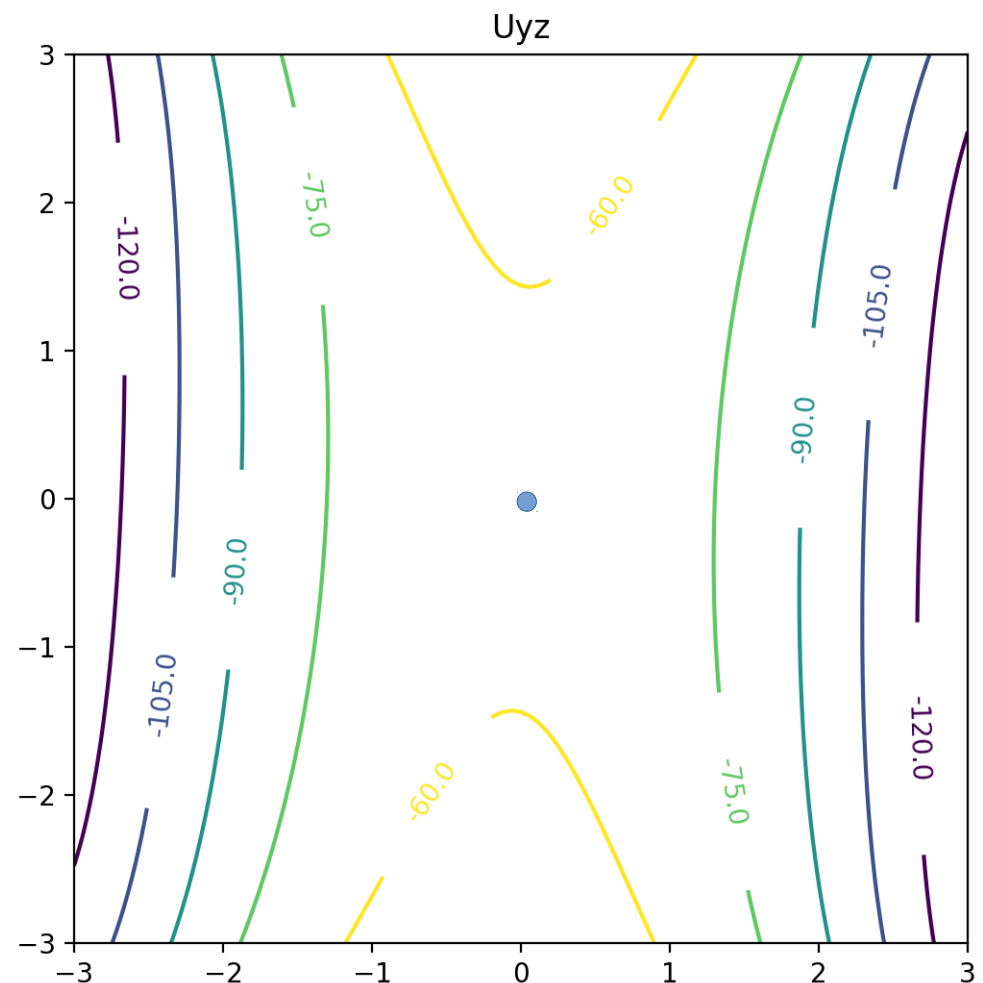
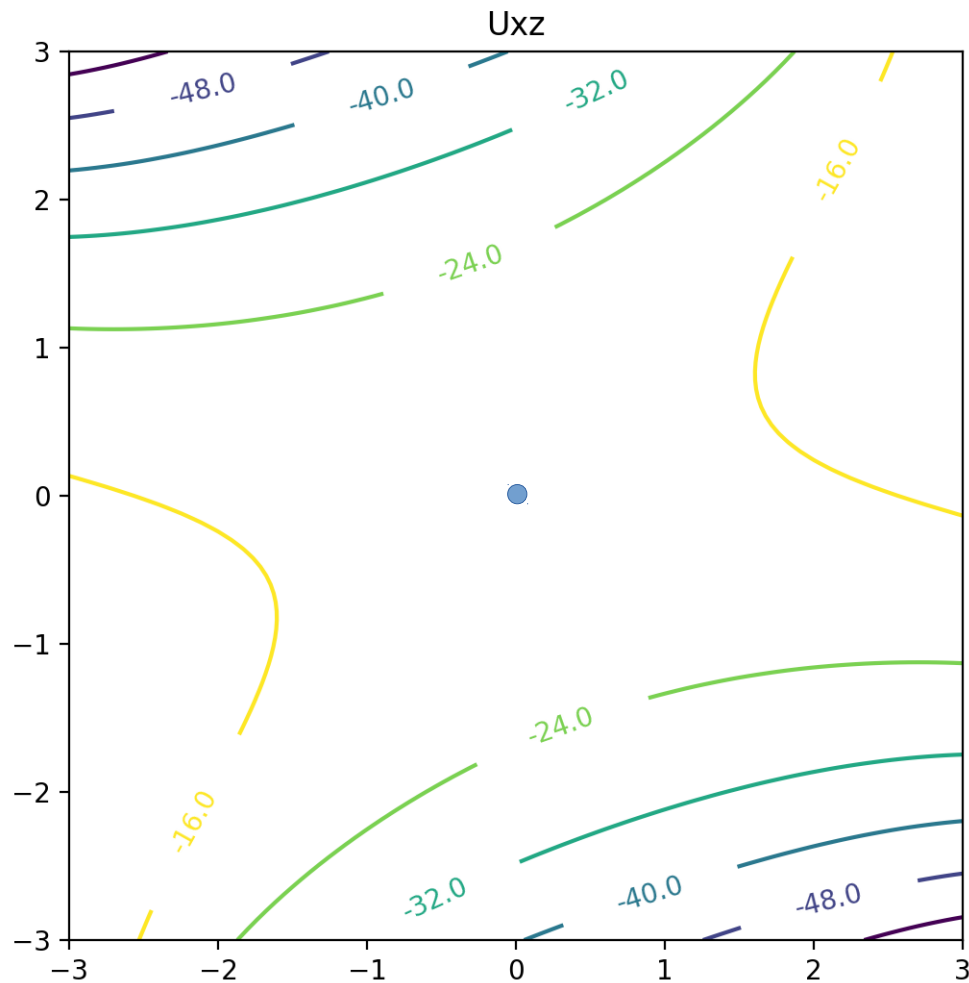
A **tömegek alakja** megjelenik a kiszámolt $\Delta \kappa$ anyagi tényezőkben,

$$\Delta \kappa = c \frac{U_{xz}}{U_{yz}} \left(f_3 B_3 + f_4 B_4 \right)$$

... és a mérés helyén és a mérés idejében
az erőter szerkezete alapvetően
befolyásolta az eredményt (főleg f_3, B_3)

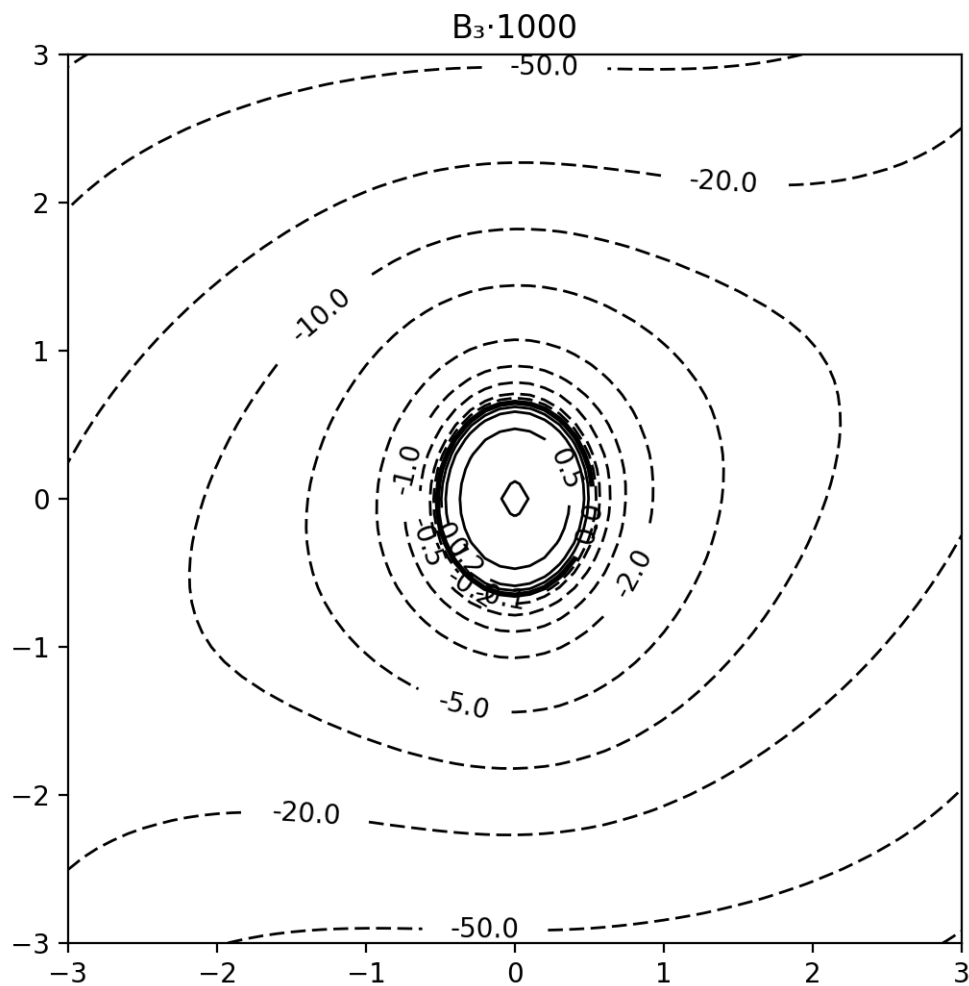
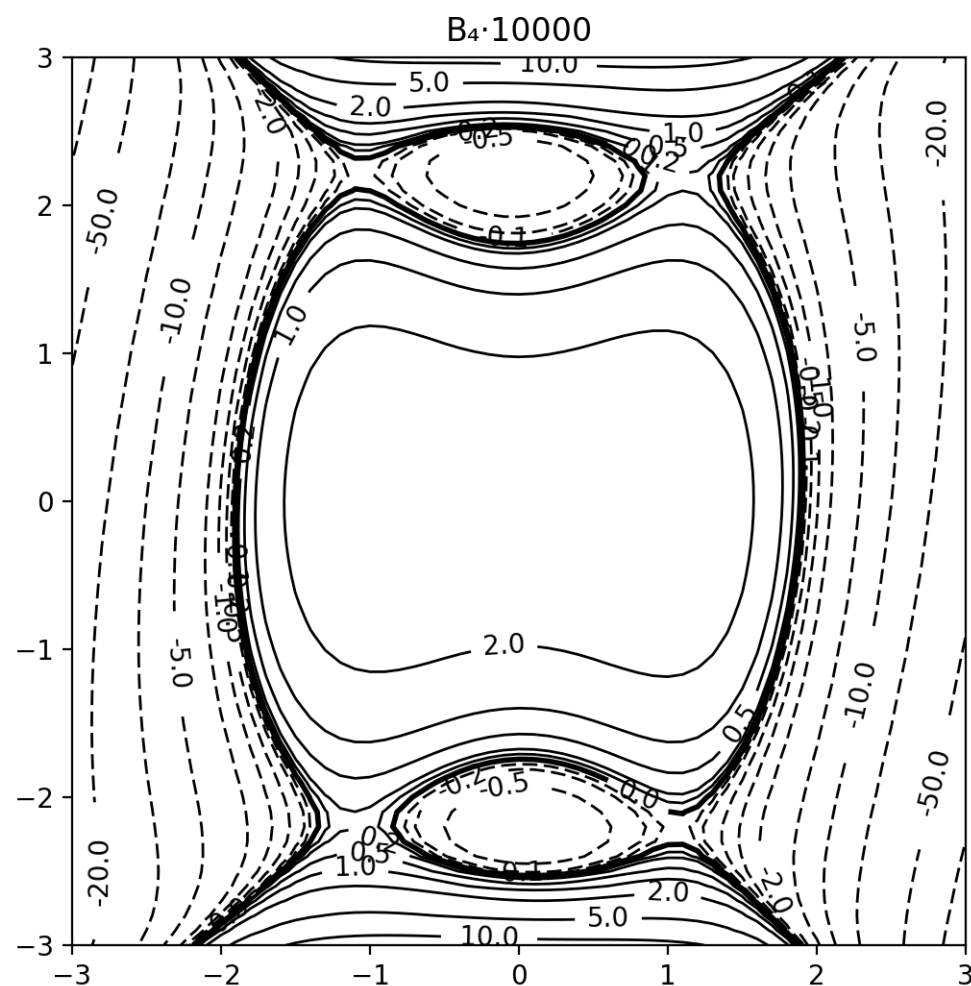


Egyszerű tömegmodell (4 fal)



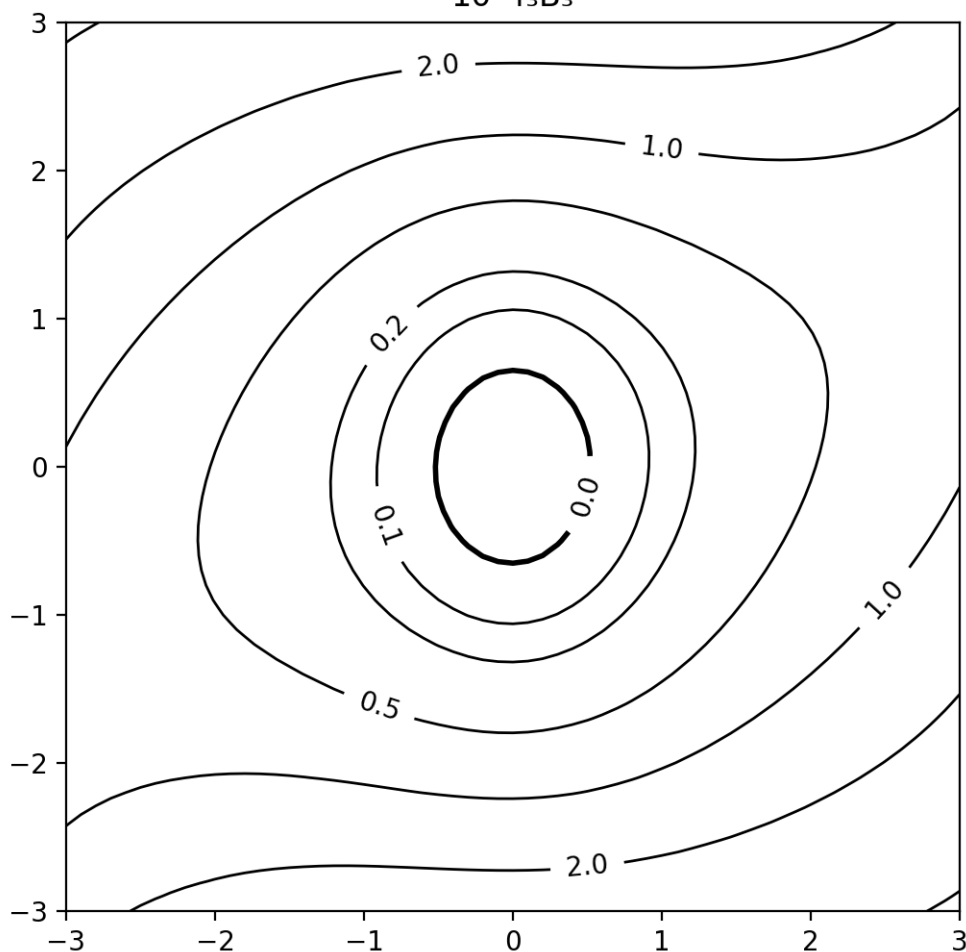
középen: $U_{xz} = -18 \text{ E}$, $U_{yz} = -62 \text{ E}$



B_3  B_4 

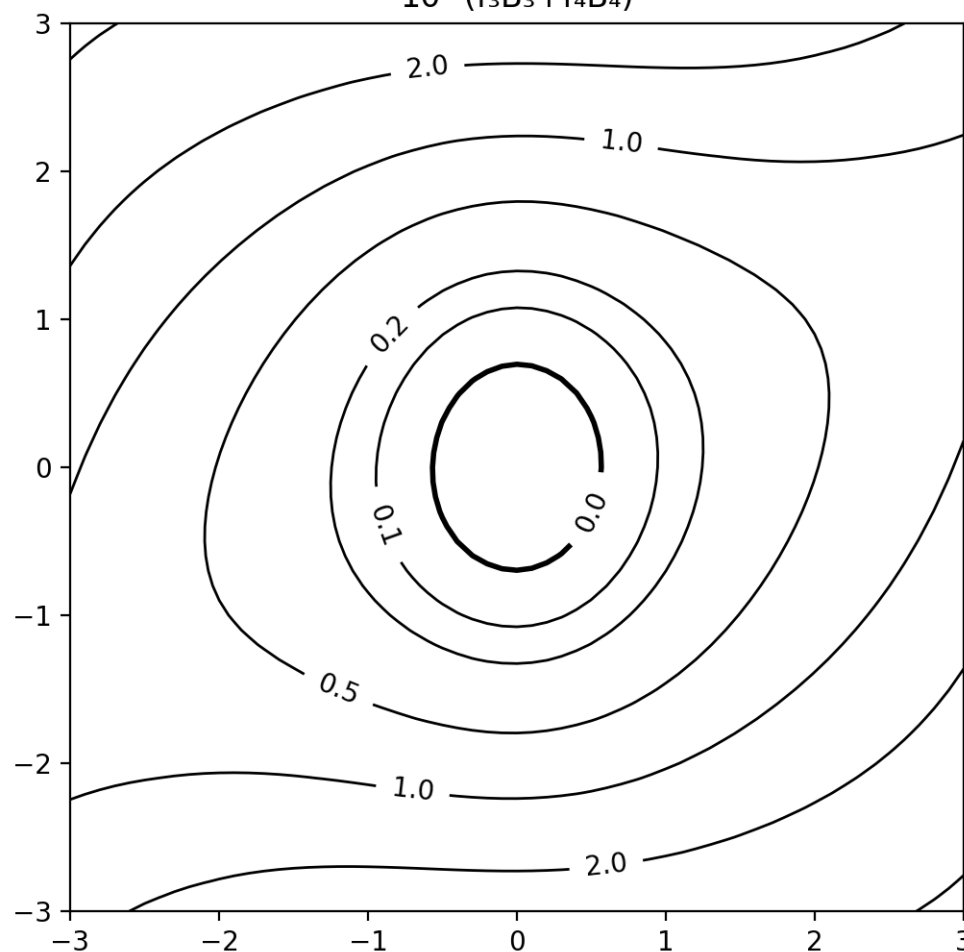
$$f_3 B_3$$

$$10^3 \cdot f_3 B_3$$

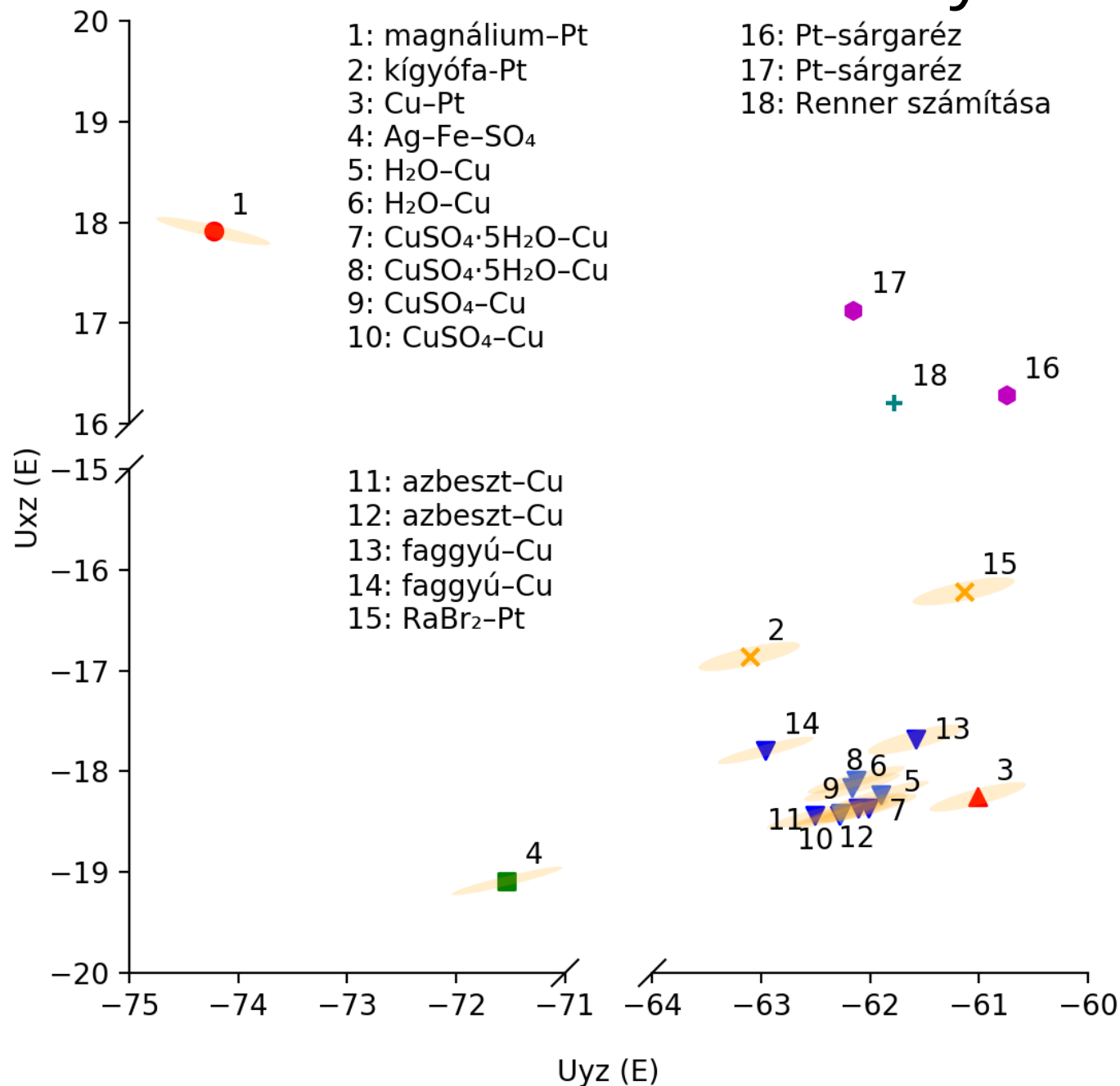


$$f_3 B_3 + f_4 B_4$$

$$10^3 \cdot (f_3 B_3 + f_4 B_4)$$

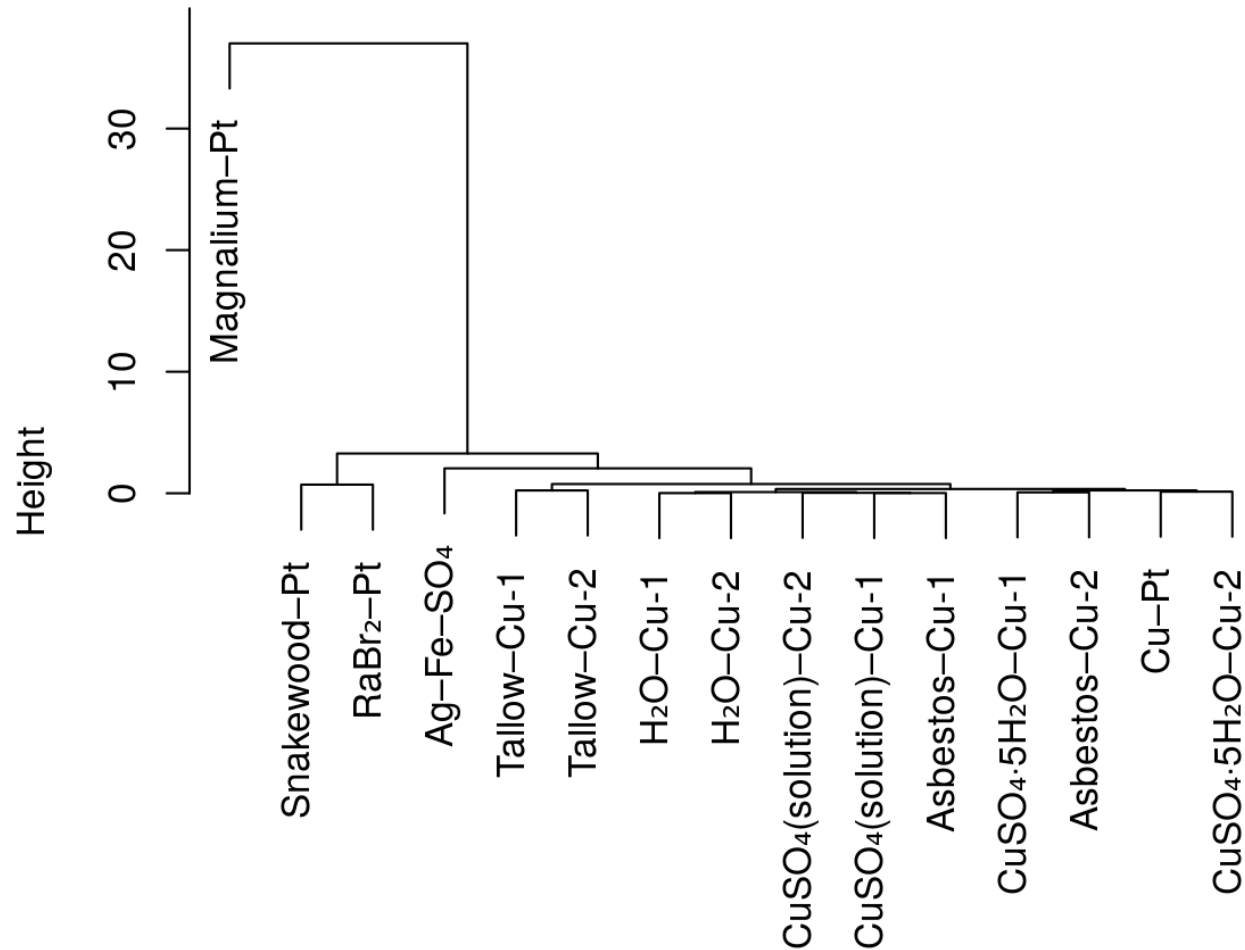


A nehézségi erő vízszintes gradienseinek változása a kísérletek helyén



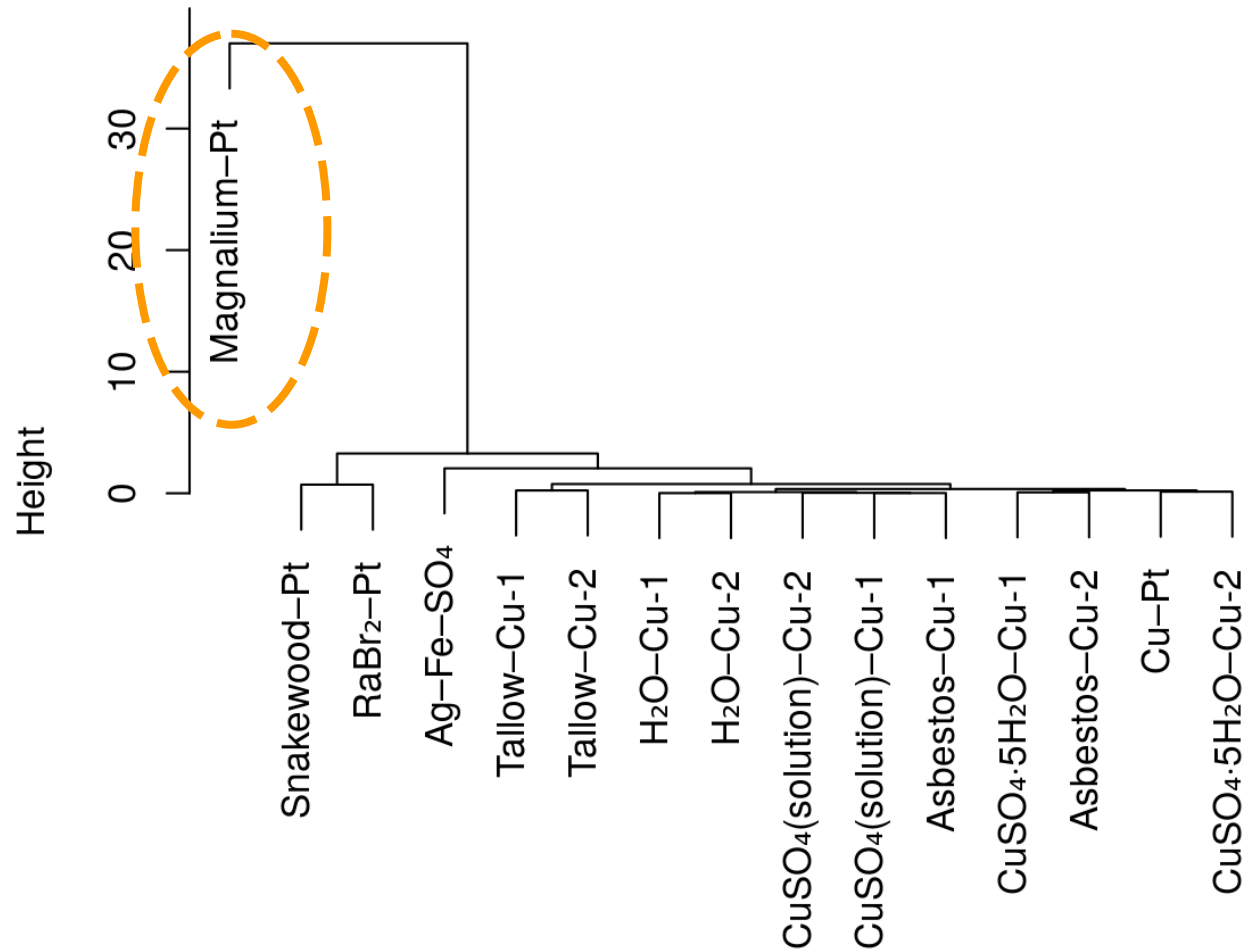
Hierarchikus klaszterezés

Cluster Dendrogram



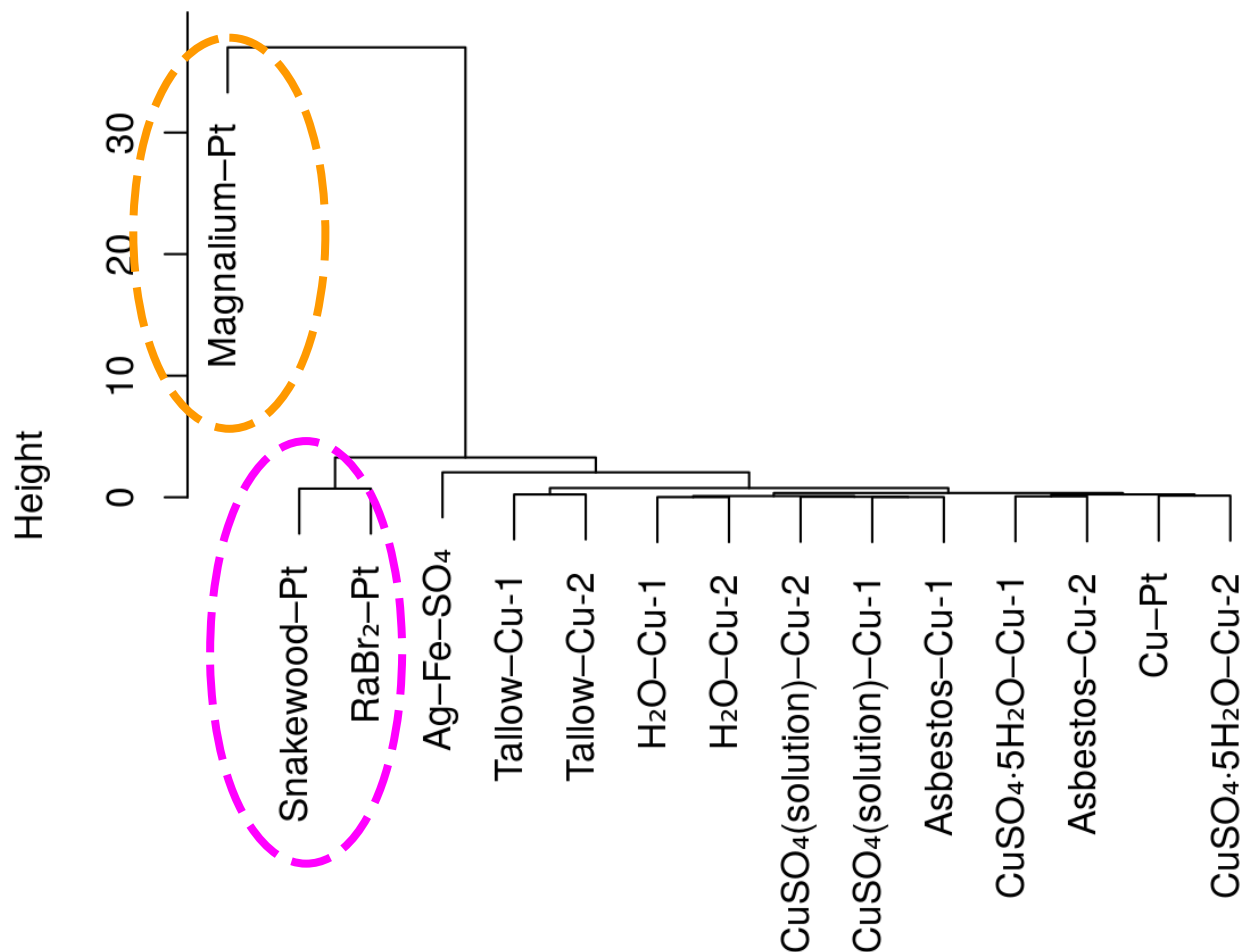
Hierarchikus klaszterezés

Cluster Dendrogram



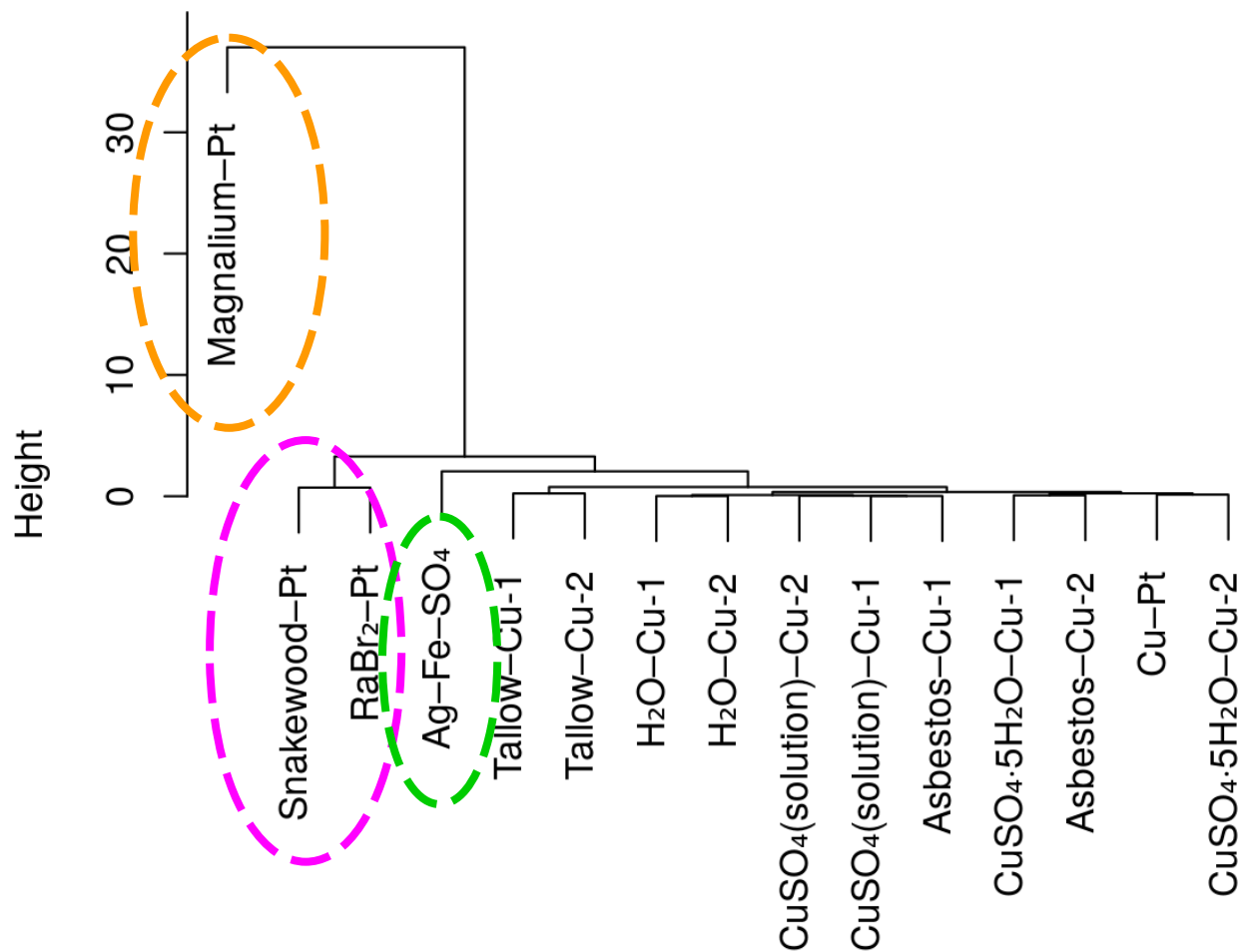
Hierarchikus klaszterezés

Cluster Dendrogram



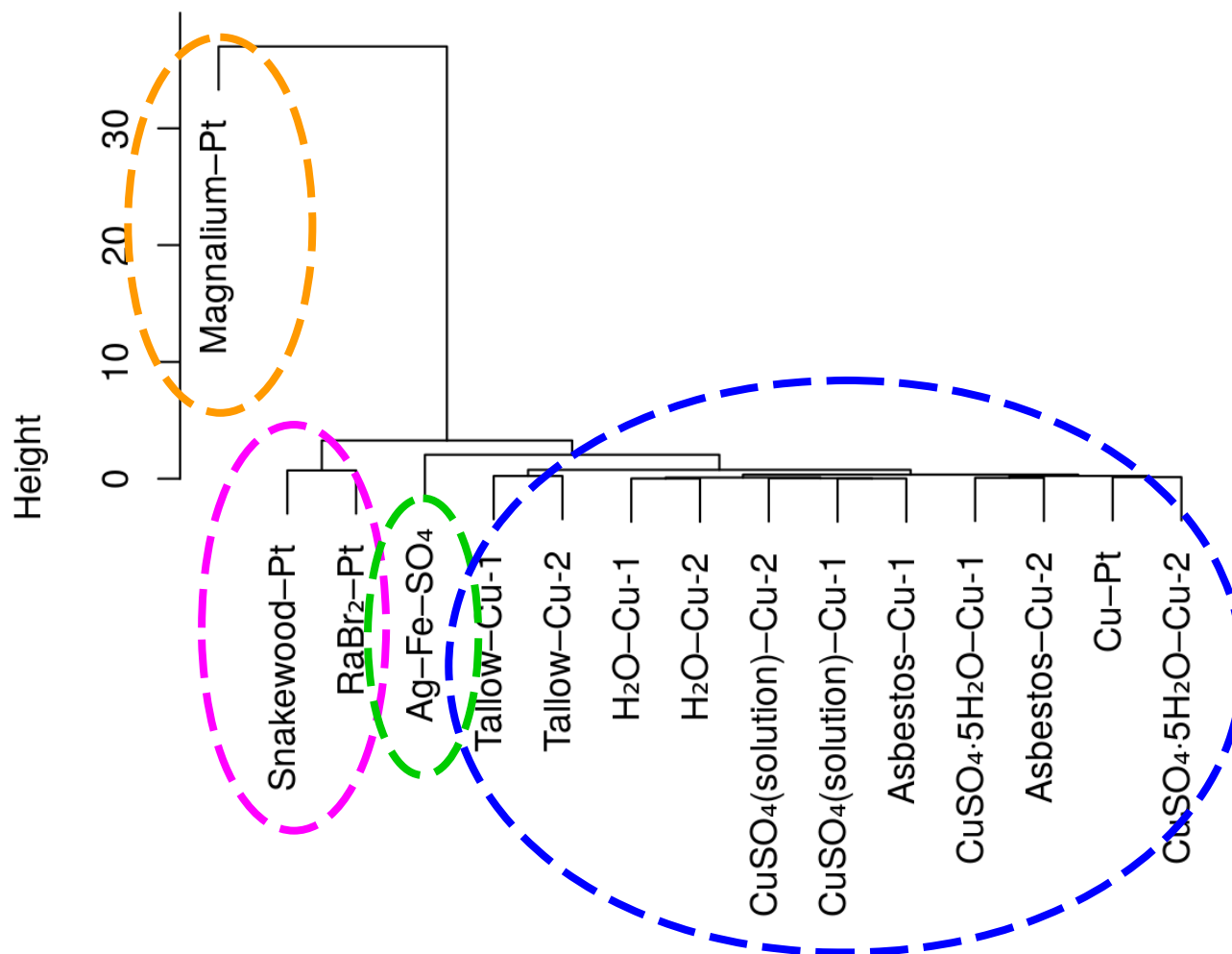
Hierarchikus klaszterezés

Cluster Dendrogram

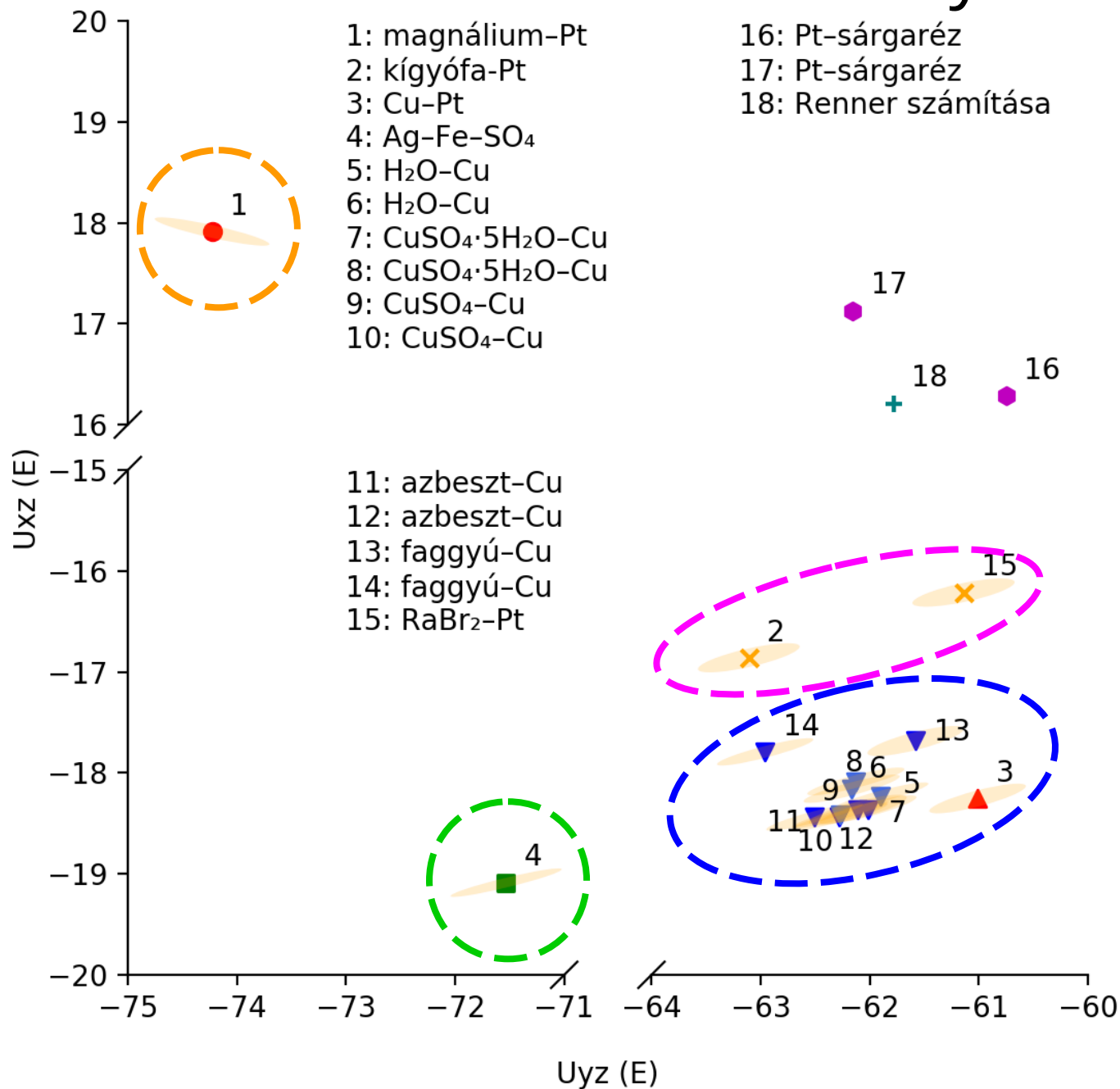


Hierarchikus klaszterezés

Cluster Dendrogram



A nehézségi erő vízszintes gradienseinek változása a kísérletek helyén



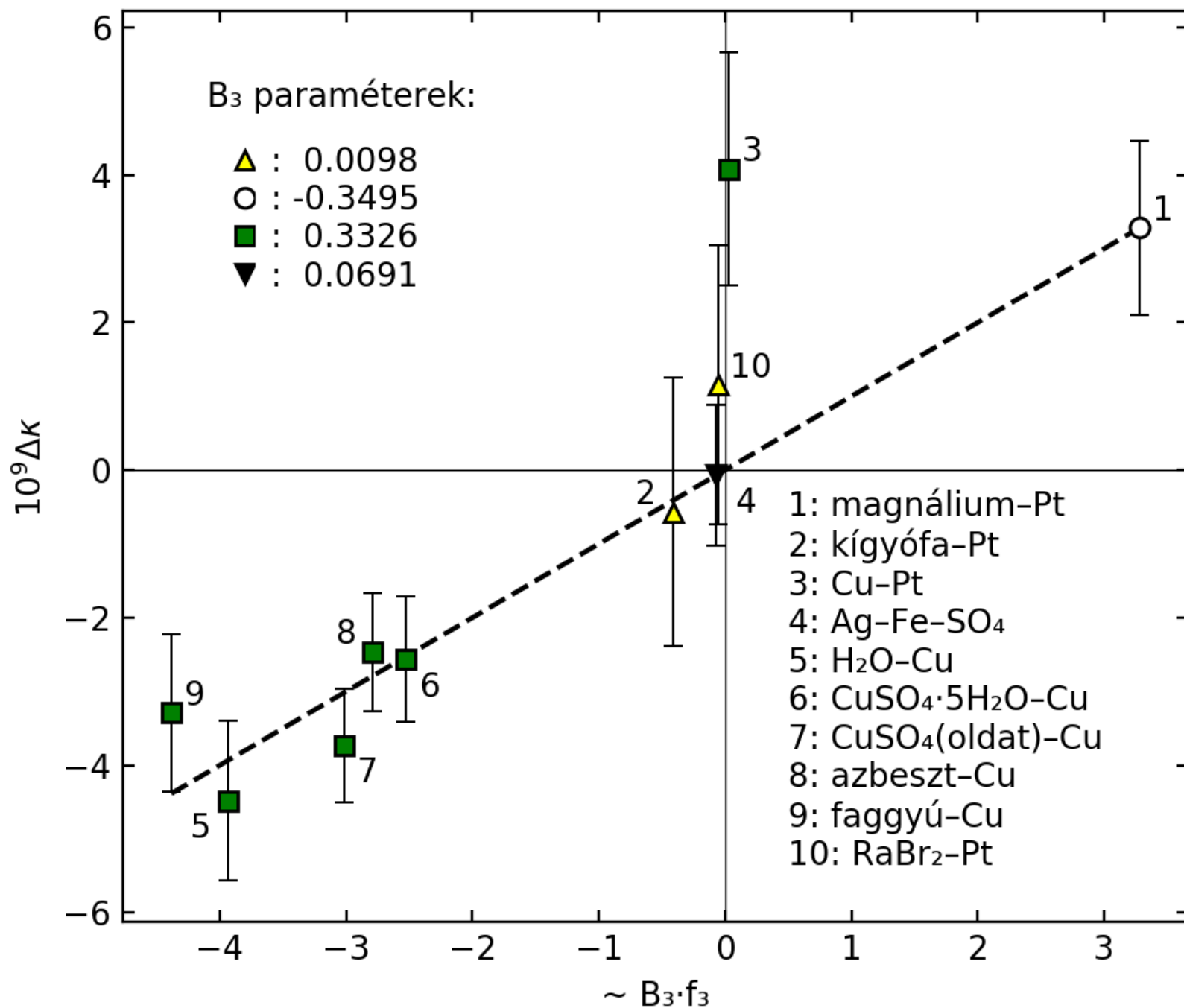
Erőtér paraméterek felvétele

- Klaszterenként külön B_3 paramétert határoztunk meg regresszióval az EPF $\Delta\kappa$ eredményekből
 - feltevés: az erőtér szerkezete klaszterenként azonos volt
 - 4 klaszter lett felvéve 4 különböző paraméterrel
- Mérési sorozatonként eltérő erőtér paramétereket felvéve elvileg majdnem teljes egyezés lenne elérhető el az eredményekkel:

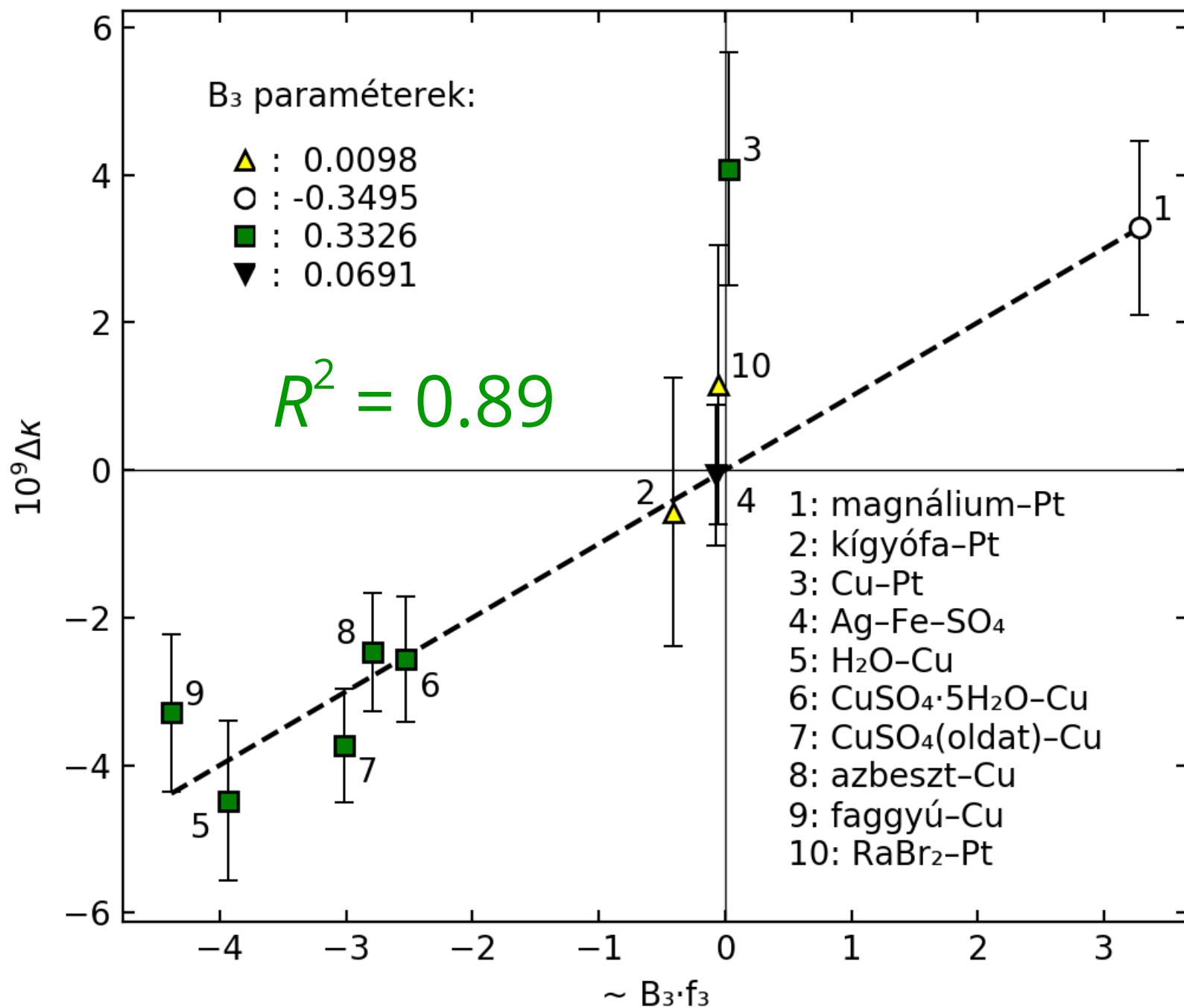
$$\Delta\kappa_i \approx c \frac{U_{xz,i}}{U_{yz,i}} f_{3,i} B_{3,i} \longrightarrow B_{3,i} \approx \frac{\Delta\kappa_i U_{yz,i}}{c f_{3,i} U_{xz,i}}$$



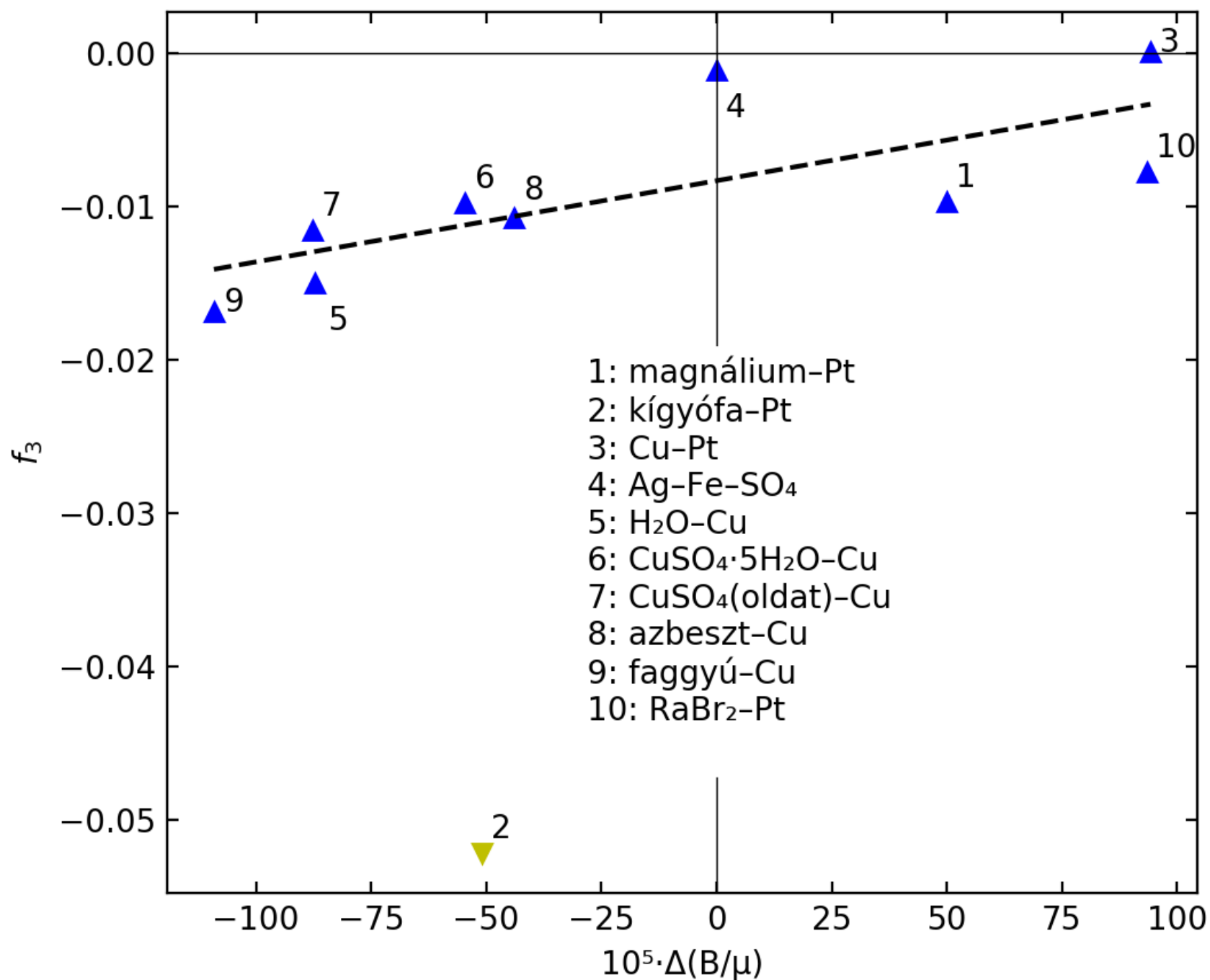
Modellhiba és anyagi tényezők



Modellhiba és anyagi tényezők



Alakfüggő tényezők és $\Delta(B/\mu)$



Fischbach et al. (1988) $\Delta(B/\mu)$

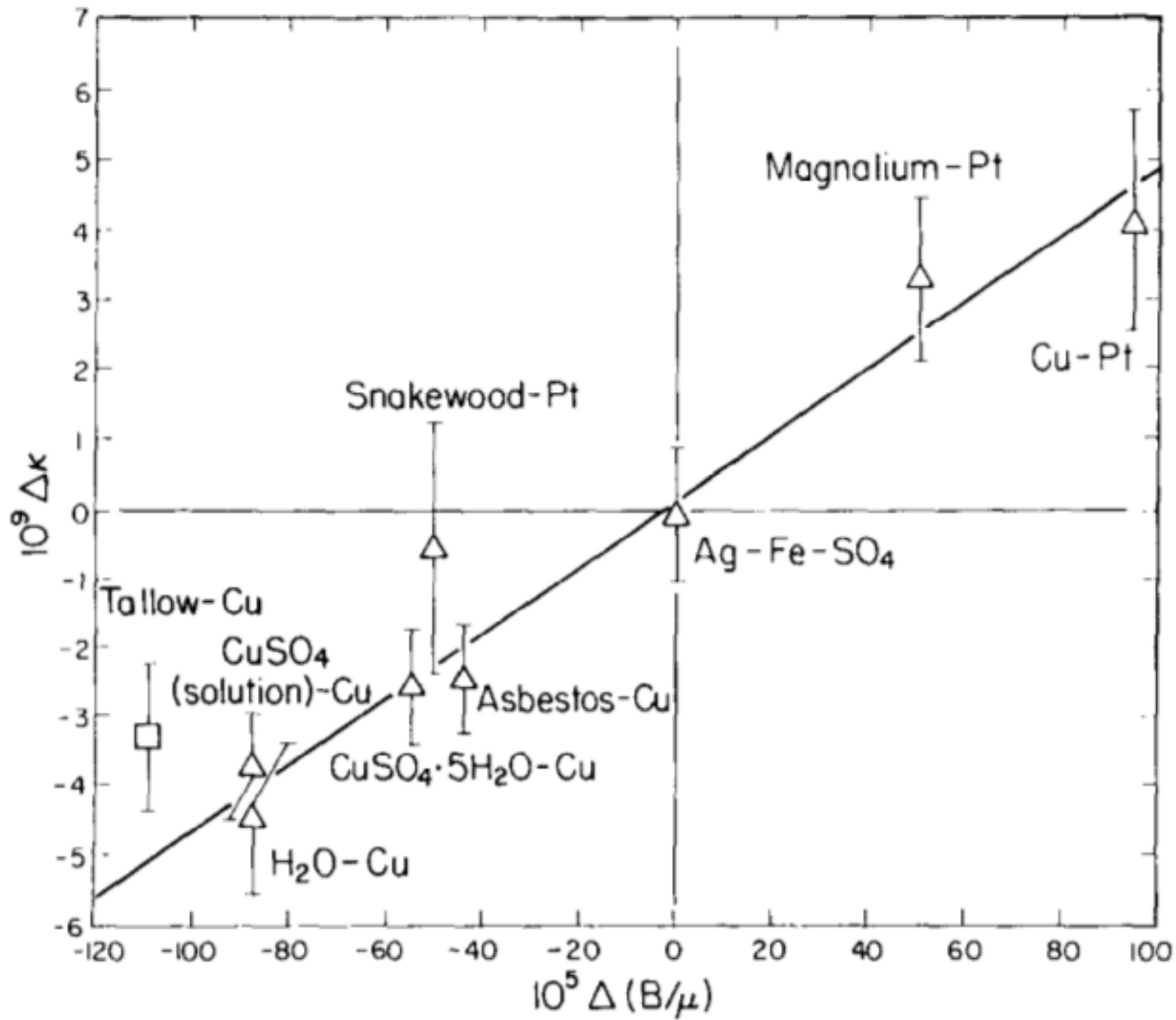


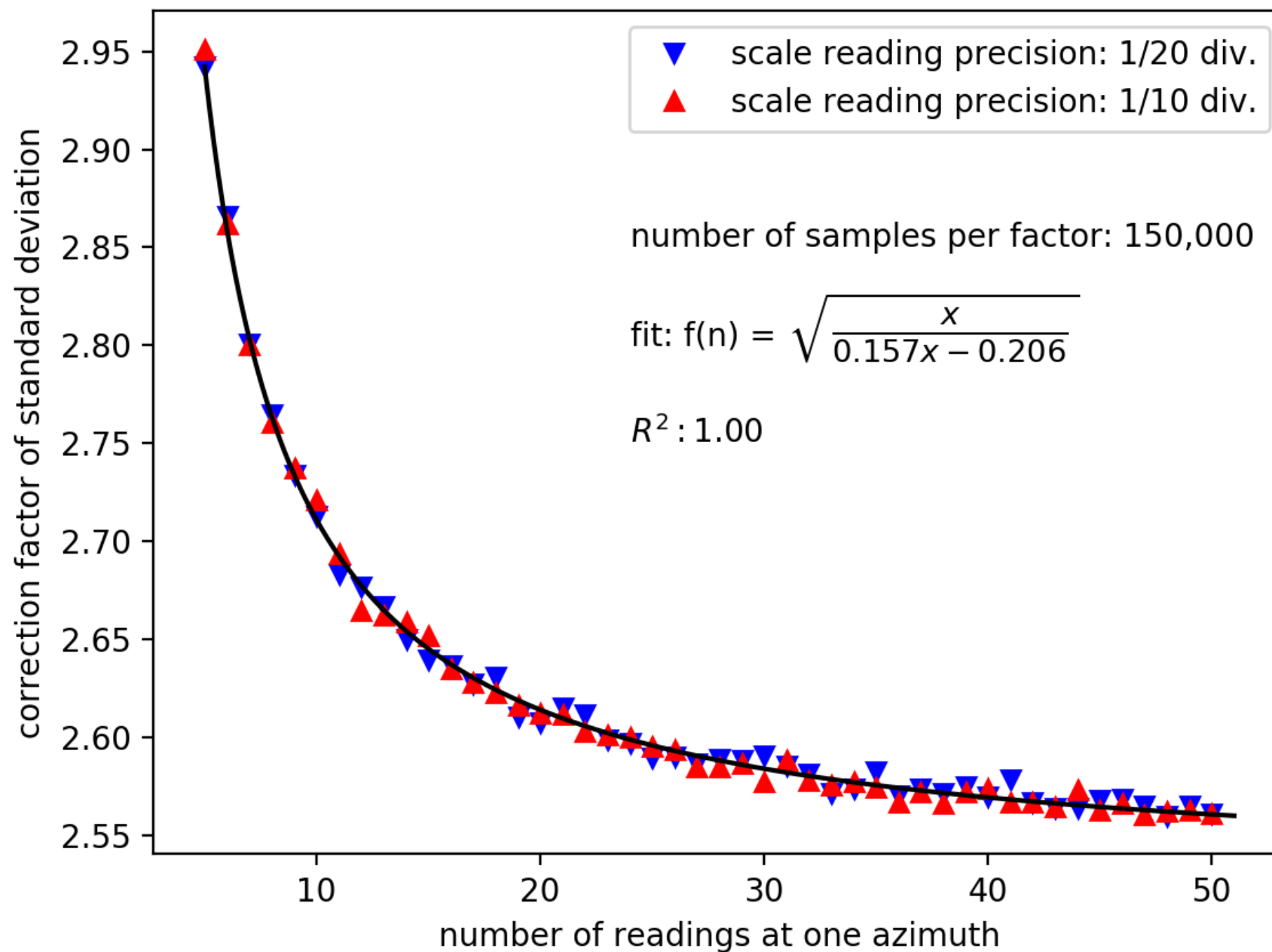
FIG. 5. Plot of $\Delta\kappa$ versus $\Delta(B/\mu)$ using the recalculated EPF data from Table II and the values of $\Delta(B/\mu)$ from Table IV. The data shown are for the "composite" values of $\Delta\kappa$, and the solid line represents the result of fit number (2) from Table VI.

Renner kísérlete (1935)

- Renner J. (1935): Kísérleti vizsgálatok a tömegvonzás és a tehetetlenség arányosságáról, Matematikai és Természettudományi Értesítő, 13, 542
- 1930-35 között végzett vizsgálatok 7 anyagpárra
 - Pt-sárgaréz, üvegcsseppek-sárgaréz, üvegtörmelék-sárgaréz, paraffin-sárgaréz, ammoniumfluorid-Cu, mangánöntvény-Cu, Bi-sárgaréz
- $1/2 \cdot 10^9$ a közölt hibahatár
- Roll, Krotkov, Dicke (1964) kritikái
 - hibaszámítás – nem független értékeket függetlenként kezeltek
 - túl kicsik az eltérések a kimutatott szóráshoz képest



Hibaszámitás vizsgálata



Renner eredményei

TABLE I
MEASUREMENTS BY EÖTVÖS *et al.* (5) AND RENNER (6) OF THE DIFFERENCE
IN PASSIVE GRAVITATIONAL TO INERTIAL MASS RATIOS FOR VARIOUS
MATERIALS

A	Materials	B	η (A,B) $\pm$ standard deviation of the mean
		<u>Renner^a</u>	
Platinum	Brass		$(0.45 \pm 0.65) \times 10^{-9}$
Batavian glass drops	Brass		$(-0.06 \pm 0.67) \times 10^{-9}$
Ground Batavian glass drops	Brass		$(0.21 \pm 0.65) \times 10^{-9}$
Paraffin + brass vial	Brass		$(0.24 \pm 0.26) \times 10^{-9}$
NH ₄ F + brass vial	Brass		$(0.06 \pm 0.25) \times 10^{-9}$
Copper	Manganese alloy		$(-0.08 \pm 0.20) \times 10^{-9}$
Copper	Manganese alloy		$(-0.12 \pm 0.22) \times 10^{-9}$
Bismuth	Brass		$(-0.14 \pm 0.74) \times 10^{-9}$

^a As discussed in the text, the standard deviations given in this table for Renner's results should be increased by a factor of three.

Roll et al. Annals of Phys 26, 442-517 (1964)



Standardizált eltérések javított szórással – Renner adatai

Pt-sárgaréz	0.271
Bat. üvegcsépp – sárgaréz	-0.035
Bat. üvegtörmelék – sárgaréz	0.127
Paraffin – sárgaréz	0.362
NH ₄ F – sárgaréz	0.094
Réz – mangánötvözet	-0.157
Réz – mangánötvözet	-0.214
Bi – sárgaréz	-0.074

Korrekciós tényező: 2.55

Annak a valószínűsége, hogy 8 standard normális eloszlású valószínűségi változó abszolút értékének maximuma csak **0.362** legyen, mindössze **$4 \cdot 10^{-5}$** .

Nem korrigált szórással ez a valószínűség **0.030**.



Standardizált eltérések javított szórással – Eötvös et al. adatai

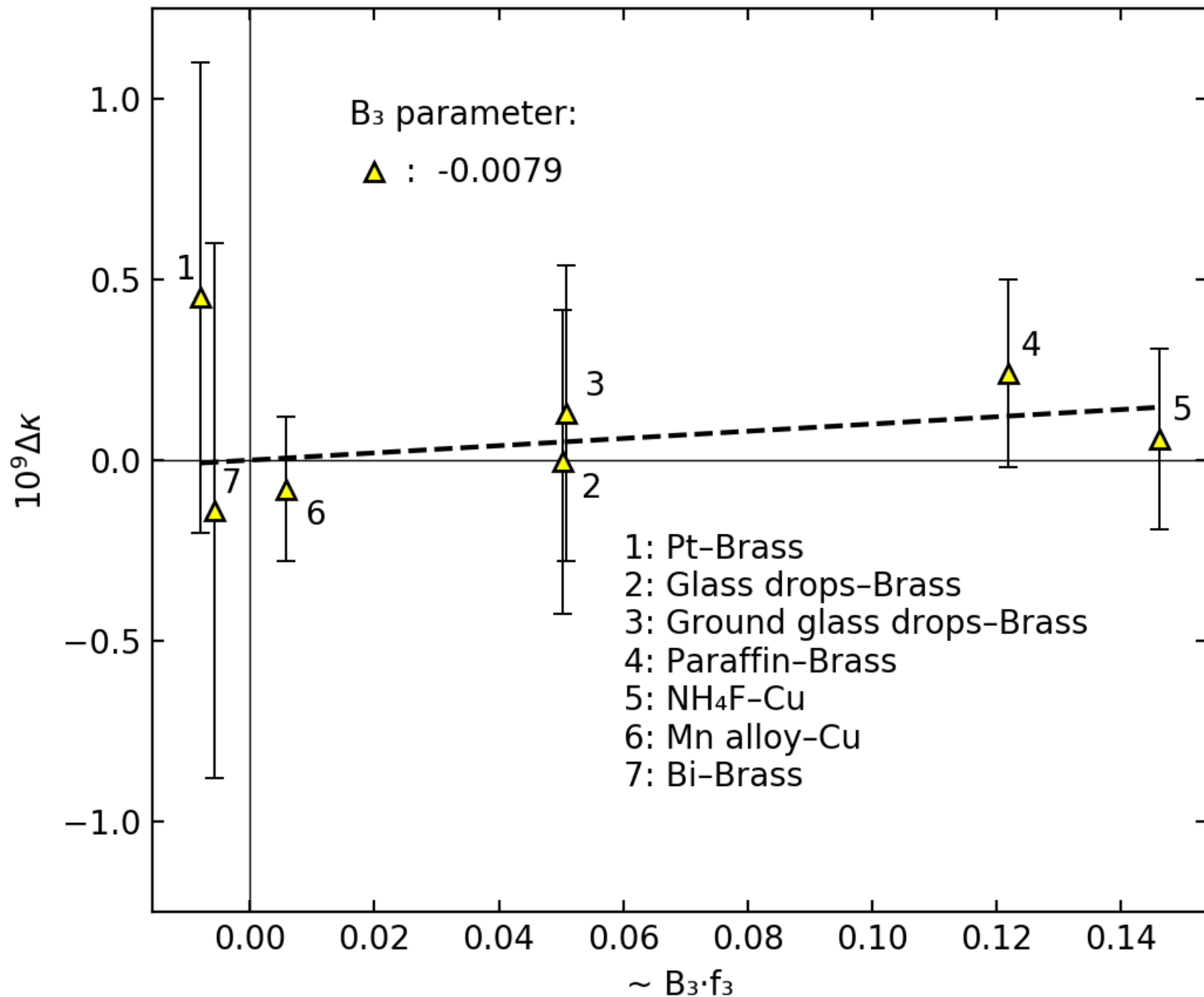
magnálum–Pt	1.090
kígyófa–Pt	-0.123
Cu–Pt	1.013
Ag–Fe–SO ₄	-0.029
H ₂ O–Cu	-1.627
CuSO ₄ ·5H ₂ O–Cu	-1.186
CuSO ₄ (oldat)–Cu	-1.900
azbeszt–Cu	-1.206
faggyú–Cu	-1.217
RaBr ₂ –Pt	0.239

Korrekciós tényező: 2.55

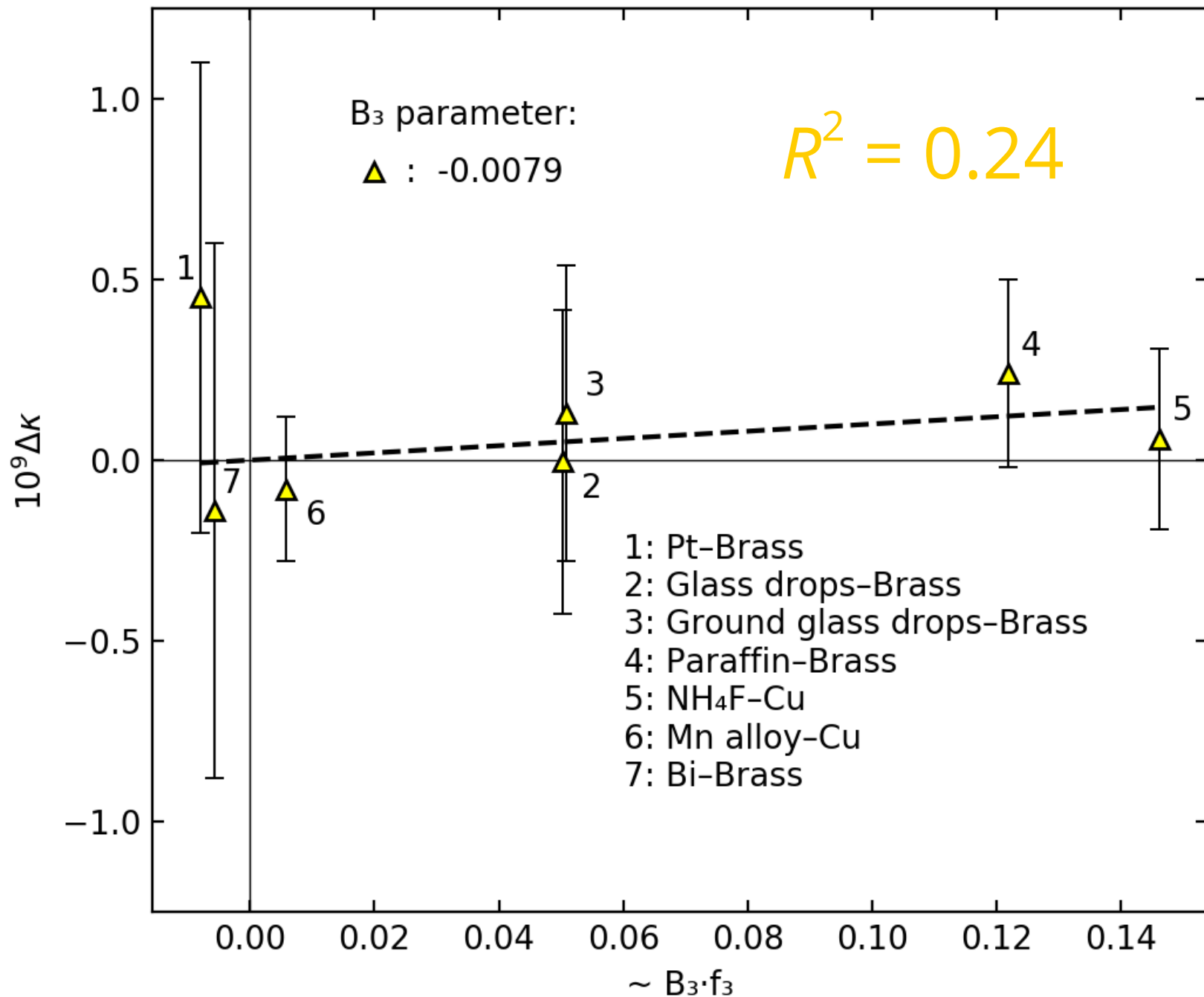
Annak a valószínűsége, hogy 10 standard normális eloszlású valószínűségi változó abszolút értékének maximuma **1.900** legyen, **0.554**.



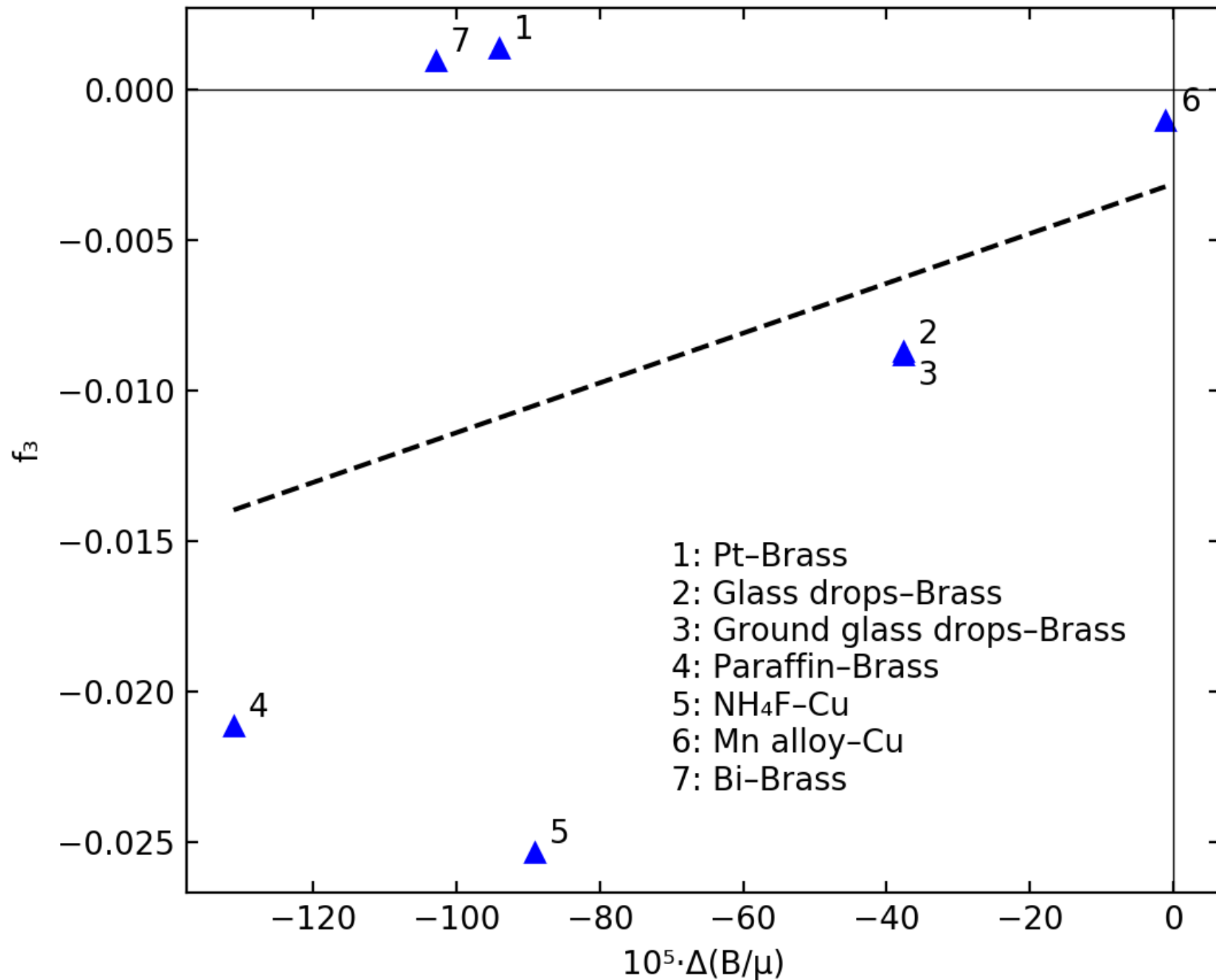
Modellhiba és anyagi tényezők



Modellhiba és anyagi tényezők



Alakfüggő tényezők és $\Delta(B/\mu)$



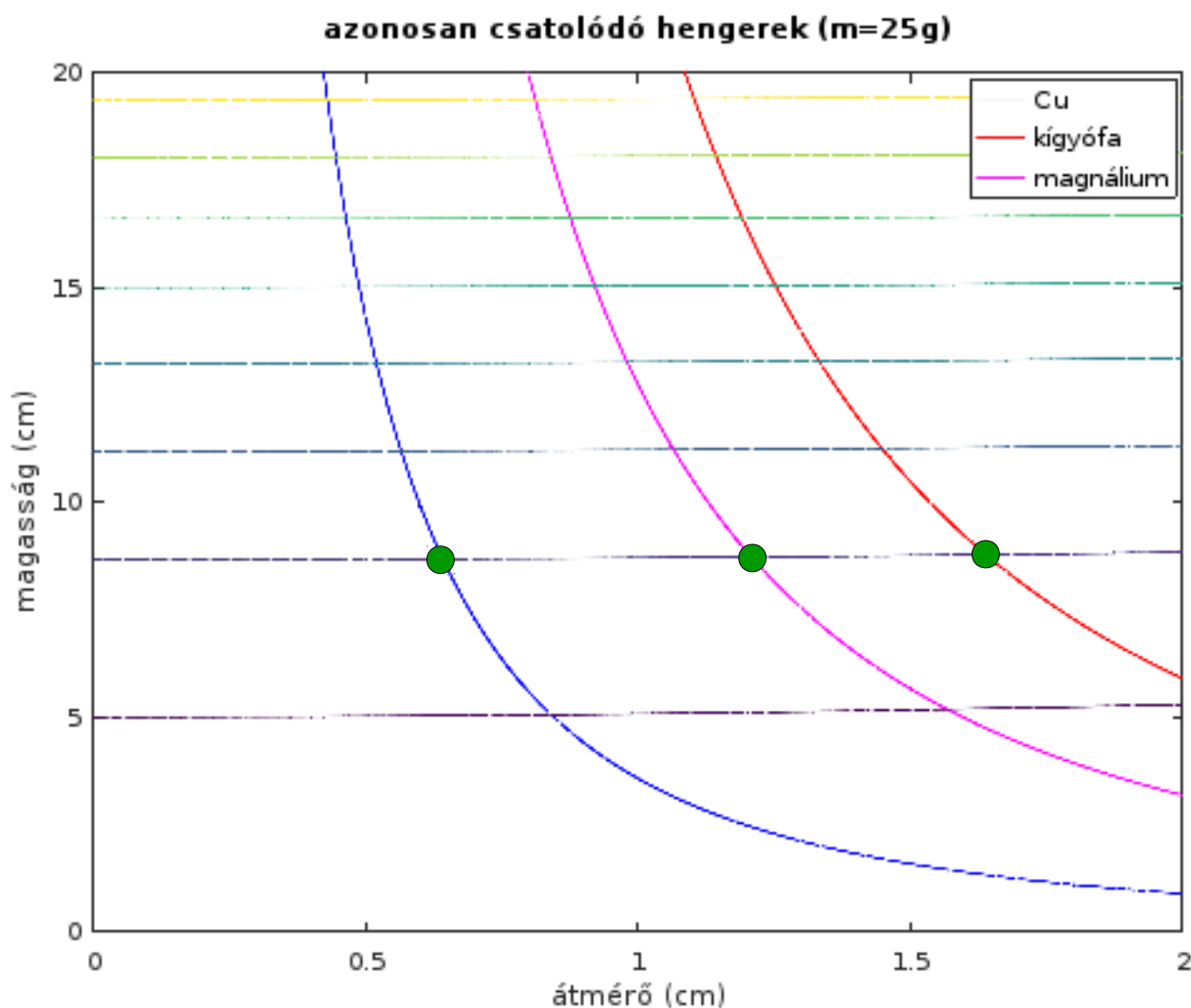
Tanulságok – újramérés

- A próbatömeg alakjának változásából adódó hatással foglalkozni kell:
 - *erőtér* szerkezetének meghatározásával (B_3 , B_4)
 - azonos anyagú, különböző méretű próbatömegek méréséből levezethető *korrekció* számításával
 - azonos csatolási együtthatók választásával ($f_3=0$, $f_4=0$)
 - olyan próbatömeg alkalmazásával, amelynél nincs alaktól, mérettől függő csatolódás – pl. gömb



Azonos csatolódasú hengerek

$4H^2 - 3d^2$ azonos értékű marad (~állandó magasság)



$$I_{31} = mx_0 \left(4z_0^2 - x_0^2 - y_0^2 + \frac{1}{3} \mathbf{H^2} - \frac{1}{4} \mathbf{D^2} \right)$$

$$I_{41} = -mx_0 z_0 \left(4z_0^2 - x_0^2 - y_0^2 + \mathbf{H^2} - \frac{3}{4} \mathbf{D^2} \right)$$

Csatolási együtthatók gömb alakú próbatestre

álló henger	
l_{21}	●
l_{22}	●
l_{31}	■
l_{32}	●
l_{33}	●
l_{41}	■
l_{42}	■
l_{43}	●
l_{44}	●

gömb	
l_{21}	●
l_{22}	●
l_{31}	●
l_{32}	●
l_{33}	●
l_{41}	●
l_{42}	●
l_{43}	●
l_{44}	●

További tanulságok

- Jól ismert fizikai jelenség kínált magyarázatot egy furcsa hatásra (ne vessük el túl hamar a klasszikus modelleket)
- Látszólagos korreláció jelentkezett egy nem releváns fizikai paraméterrel (interpretációs hiba)
- Ha egy modell már sokszor bevált, nem biztos, hogy legközelebb is be fog válni (Eötvös-inga nyomatéki modellje)
- Eötvösék kísérletének a rendkívüli gondosságáról és pontosságáról tanúskodik az, hogy egy ilyen kis hatás is számottevően befolyásolhatta az eredményeket



Zárszó

“Öt éve volt, hogy Eötvös, Pekár és Fekete klasszikus műve egy ötödik erő lehetősége iránt érdeklődést keltett. Ezóta számos új kísérletet hajtottak végre, és sok további van még folyamatban. Az új kísérletek nem erősítették meg egy ötödik erő létezését abban a formában, amire Fischbach és munkatársai Eötvös adatai alapján gondoltak [10]. Viszont **senki sem bukkant olyan hibára Eötvös kísérletében, amely a meggyőző korreláció forrása lehetne**. Minthogy minden modern kísérlet eltér az eredeti Eötvös-kísérlettől, megmarad annak lehetősége, hogy van valamilyen elméleti modell, amelyben **az eredeti kísérletnek egy eddig észre nem vett körülménye rejt a probléma kulcsát**: Eötvösék miért láttak egy hatást, miközben az újabbak ilyent nem találnak.”

Fischbach–Bod–Ziegler–Marx: Az Eötvös-kísérlet száz éve
(tudtor.kfki.hu)

