Az álruhás Laplace egyenlet, avagy mit tesz hozzá a derékszögű koordinátákkal történő felírás a gömbi koordinátás megoldás megértéséhez?

Az előadásomban bemutatom, hogy a gömbi koordinátákban felírt Laplace egyenlet megoldásában szereplő együtthatók és bázisfüggvények hogyan írhatók fel derékszögű koordinátákkal, és bemutatom, hogy ezek a függvények hogyan állíthatók elő a MATLAB© szimbolikus számítási környezete segítségével. A gömbi koordinátás megoldásban szereplő együtthatók szükséges normalizálását, amely biztosítja a végső megoldás azonosságát a tisztán Descartes-féle koordináta-rendszerben való megoldással. Végül bemutatok egy, a két módszert összekapcsoló, egyszerűbb alakú és szimmetrikus bázisfüggvényekből és együtthatókból álló megoldást is.

A 3-dimenziós Laplace egyenlet egy parciális differenciálegyenlet, amelynek a határfeltételekhez illesztett megoldása adja a vizsgált térrészben egy skalár jellegű mennyiség térbeli változását, így a gravitáció, a mágnesség és az elektrosztatika alapegyenletének tekinthető.

A gömbi koordinátákkal felírt Laplace egyenlet elemi megoldásai három olyan függvény szorzataként kaphatóak, amelyek mindegyike csak egy-egy koordináta függvénye. Ezt a módszert a változók szétválasztásának nevezzük. Egy elemi függvény a sugár koordináta negatív egész kitevős hatványának, a szélességi koordináta asszociált Legendre függvényének és a hosszúság koordináta harmonikus függvényének a szorzata. A teljes megoldás ezen elemi megoldások szuperpozíciója. Egy adott elemi megoldás a forráson belül a sűrűségfüggvényének a koordináták függvényei szorzatával alkotott térfogati integráljaként létrejövő együttható és a tér vizsgált pontjainak koordinátáit tartalmazó bázisfüggvény szorzataiból állnak, ahol a bázis és együttható függvények azonos alakúak.

A Matlab programcsomag szimbolikus számítási környezete segítségével sikerült létrehoznom ezeket a függvényeket. Az asszociált Legendre függvényeket a Rodrigues-formulával hoztam létre. A szimbolikus modulon belül a függvényeket trigonometrikus transzformációkkal tudtam egyszerűsíteni, és az egyes megoldásokban szereplő függvényeket sikerült az *X, Y, Z* Descartes koordinátákba átszámolnom, és az elemi megoldásokhoz tartalmazó függvényalakokat megjelenítenem.

Eredményül olyan függvényeket kaptam, amelyek közvetlenül összehasonlíthatók voltak a 3-dimenziós Taylor-sorfejtésen alapuló tiszta Descartes-féle koordináta-rendszerben felírt megoldással, és ez lehetővé tette számomra a normalizációs együtthatók kiszámítását. A kapott együtthatók a geoidszámításokban rendszeresen használt Schmidt-normálási együtthatók helyett a Gauss-normálási együtthatók voltak.

Megvizsgáltam a tisztán derékszögű módszer bázisfüggvényei és a gömbi koordinátás módszer koefficiensei közötti hasonlóságokat is. A két módszer részmegoldásaiban sajátos, visszatérő jellegzetességeket vettem észre, amelyek segítségével létrehoztam a lehető legegyszerűbb, szimmetrikus, a Laplace egyenletet kielégítő bázisfüggvényeket, amelyeket a – a gömbi módszerhez hasonlóan – azonos alakú együtthatófüggvényekkel szorozva, majd a szorzatokat összeadva az előző módszerekkel azonos végső megoldás kapható. Ezzel sikerült megtalálni azt a megoldást, amely összeköti a gömbi és Descartes-féle koordináta-rendszer szerinti megoldásokat.